ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 7 **April 1927** **Heft 2**

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder.[1]

Von **E. SÖRENSEN** in Karlsruhe/B.

Die Methoden der konformen Abbildung sind bisher nur wenig zur Darstellung von Potentialströmungen bei Rotation fester Körper verwandt worden. Der Hauptgrund dafür liegt wohl in der Schwierigkeit, daß die Randbedingungen bei der Abbildung in diesem Falle nicht erhalten bleiben. Alle Bewegungen fester Körper in der Flüssigkeit führen im Sinne der Potentialtheorie zu Randwertproblemen zweiter Art, weil auf gewissen Rändern eines Bereiches nicht das Potential sondern seine Ableitung nach der Normalen gegeben ist. Man hat sich bei Abbildungen, die sich auf reine Translation bezogen, so geholfen, daß man von der Absolut- zur Relativströmung übergegangen ist und dadurch das Randwertproblem zweiter Art in eines erster Art verwandelt hat. Das Verfahren läßt sich aber bei den Rotationsbewegungen nicht anwenden, weil die Relativbewegung nicht mehr wirbelfrei ist. Die Behandlung von Rotationsbewegungen ist aber sehr wichtig, weil sie die unerläßliche Bedingung für die Untersuchung der Verhältnisse in Laufrädern von Kreiselmaschinen ist. Es liegen bereits einige erfolgreiche Versuche zur Behandlung von Rotationsbewegungen vor. Kucharski hat 1918 die Rotation des radialen Schaufelsterns mit Schaufeln, die bis in die Achse gehen, untersucht. (Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit, Oldenbourg 1918). Er hat dabei, ohne die konforme Abbildung zu benutzen, die Relativströmung untersucht und zahlenmäßig durchgerechnet mit Hilfe eines Näherungsverfahrens. Spannhake hat dann 1925 seiner Untersuchung die Absolutströmung zugrunde gelegt und den radialen Schaufelstern mit beliebigem Ein- und Austrittsradius mathematisch exakt mit Hilfe der konformen Abbildung gerechnet und die Möglichkeit zur Nachrechnung von beliebigen Schaufelformen angegeben. (Festschrift zur Jahrhundertfeier der T. H. Karlsruhe 1925; Hydraulische Probleme VDI-Verlag 1925; diese Zeitschr. 1925 Heft 6). Beide Autoren behandeln die sogenannte zweidimensionale Strömung, die auch in der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegt werden soll.

[1] Als Dissertation zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs der Technischen Hochschule Fridericiana zu Karlsruhe/B. vorgelegt. Referent: Prof. W. Spannhake, Korreferent: Prof. Dr. C. Boehm.

1. Das komplexe Potential für die Rotation. Durch die Rotation einer beliebigen Schaufel in einer komplexen w-Ebene entsteht eine bestimmte und bekannte Normalkomponente v_n der Geschwindigkeit für alle Wasserteilchen auf der Schaufeloberfläche. In der w-Ebene sei die Schaufel gegeben durch ein Stück einer Kurve $w_s = f_1(a)$, wobei a ein Parameter ist, der zwischen bestimmten Grenzen schwankt, $a_0 \leqq a \leqq a_1$. Der Winkel α, unter dem die Schaufelkurve einen Strahl vom Koordinatenanfangspunkt $w = 0$ schneidet (Abb. 1), ist ebenfalls eine Funktion von a; $\cos\alpha = f_2(a)$. Die Schaufel rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um den Punkt $w = 0$. Dadurch entsteht eine Umfangsgeschwindigkeit $u = \omega \cdot |w_s| = |f_1(a)| \cdot \omega$. Die Normalkomponente der Geschwindigkeit eines Wasserteilchens auf der Schaufeloberfläche ist dann $v_n = u \cdot \cos\alpha = \omega\, |f_1(a)| \cdot f_2(a)$. Nun werde die w-Ebene durch eine Abbildungsfunktion $w = g_1(z)$ in eine z Ebene übergeführt. Die den Punkten w_s der Schaufel entsprechenden Punkte in der z-Ebene liegen wieder auf einer bestimmten durch die Abbildungsfunktion gegebenen Kurve $z_s = g_2(a)$. Jetzt wird das komplexe Potential $\Phi(w)$ gesucht, das in der w-Ebene die Rotation der Schaufel um den Nullpunkt darstellt. Dieses Potential muß, nachdem es mit transformiert worden ist, in der z-Ebene an jedem Punkte der Kurve $z_s = g_2(a)$ eine Normalgeschwindigkeit erzeugen

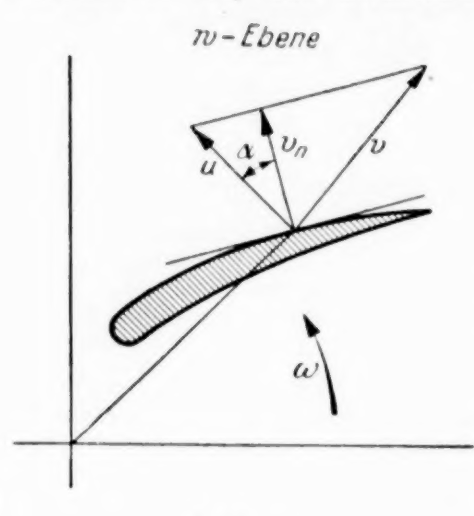


Abb. 1.

$$c_n = v_n \left|\frac{d\,w}{d\,z}\right|_{[z = z_s = g_2(a)]}$$

$$c_n = \omega \cdot |f_1(a)| \cdot f_2(a) \left|\frac{dg_1(z)}{dz}\right|_{[z = g_2(a)]} = g_3(a).$$

$c_n = g_3(a)$ ist ebenfalls eine bestimmte und bekannte Funktion.

Nun hat Spannhake für $z_s = g_2(a)$ die Gleichung eines Kreises gewählt und in dessen Mittelpunkt eine Reihe von Doppelquellen höherer Ordnung angesetzt.

$$z_s = g_2(a) = z_0 + q\, e^{i\,a};\ 0 \leqq a \leqq 2\pi,\quad \Phi(z) = \sum_1^{\infty} \frac{A_k + i\,B\,K}{(z - z_0)^K}.$$

Dann wird

$$c_n = -\sum_1^{\infty} k\,[A_K \cos(k\,a) + B_K \sin(k\,a)] \cdot q^{-K-1} = g_3(a) = \omega \cdot |f_1(a)| \cdot f_2(a) \cdot \left|\frac{d\,w}{d\,z}\right|_{[z = g_2(a)]}.$$

Das Potential ist also bestimmt, wenn man die Koeffizienten der obigen Fourier-Reihe gefunden hat. Auf diesem Wege kann man grundsätzlich das komplexe Potential für die Strömung durch ein rotierendes Kreiselrad mit beliebiger Schaufelzahl und -form finden. Die wichtigste Arbeit dabei ist eine harmonische Analyse, die nur dann leicht durchführbar ist, wenn die Funktion $c_n = g_3(a)$ eine gut konvergente Fourier-Reihe besitzt. Das ist aber lange nicht immer der Fall, und schon die Durchrechnung des weiter unten auf anderem Wege behandelten Beispieles ergab praktisch die Unmöglichkeit einer hinreichend genauen Darstellung des gesuchten Potentials durch eine derartige Reihe. Die Abbildung der Schaufel, $w = g_1(z)$, auf einen Kreis kann man allerdings auf unendlichfach verschiedene Weise vornehmen, und die Funktion $c_n = g_3(a)$ ist selbst wieder abhängig von der Lage des Mittelpunktes und vom Radius des Bildkreises. Man könnte also versuchen, Mittelpunkt und Radius so zu wählen, daß $g_3(a)$ eine stark konvergierende Reihe bildet. Es läßt sich aber nicht entscheiden, ob das immer zu einem Erfolg führen muß.

Der bei den folgenden Berechnungen beschrittene Weg stellt das Potential nicht durch eine Reihe sondern durch ein bestimmtes Integral dar. (Lamb, Hydrodynamik §§ 57 bis 58). Auf der Schaufelkurve $z_s = g_2(a)$ wird eine Verteilung von Quellen und Senken angenommen. Dieser Quellenansatz läßt sich nur machen, wenn die Schaufelkurve $z_s = g_2(a)$ in der z-Ebene einen Bereich umschließt, d. h. wenn Vorder- und Rückseite der Schaufel getrennt sind. In der w-Ebene ist das nicht notwendig. Man kann die Abbildungsfunktion so wählen, daß der von der Schaufelkontur in der z-Ebene umschlossene Bereich in der w-Ebene auf ein zweites Riemannsches Blatt abgebildet wird. Die Schaufel erscheint dann dort als Schnitt in dem einen Riemannschen Blatt der mindestens zweiblättrigen w-Ebene, wobei die Schaufelenden Windungspunkte sind.

Die in einem Punkte der Kurve $g_2(a)$ pro Sekunde entstandene oder verschwundene Wassermenge sei ebenfalls eine Funktion von a: $q(a) = 2\,g_3'(a)$. Die auf dem Kurven-

stück $d s$ entstandene Wassermenge ist $d q = 2 g_3'(a) d s$. Das Potential dieser Elementarquelle ist:

$$d \Phi = \frac{d q}{2 \pi} l n (z - z_s) = \frac{1}{\pi} g_3'(a) d s \, l n [z - g_2(a)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$d s = \left| \frac{d g_2(a)}{d a} \right| \cdot d a .$$

Das Potential für die gesamte Quellverteilung lautet also:

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \int_{a_0}^{a_1} g'_3(a) \left| \frac{d g_2(a)}{d a} \right| \cdot l n [z - g_2(a)] d a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$\frac{d \Phi}{d z} = \frac{1}{\pi} \int_{a_0}^{a_1} \frac{g'_3(a) \left| \frac{d g_2(a)}{d a} \right|}{z - g_2(a)} d a = (c_n - i c_t) e^{-i \gamma} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

wobei γ der Neigungswinkel der Schaufelkurve $z_s = g_2(a)$ gegen die reelle Achse ist. Die Aufgabe ist nun, eine Quellverteilung zu finden, die tatsächlich an jeder Stelle die gesuchte c_n-Komponente liefert. Im allgemeinen Fall ist damit die Schwierigkeit nur verschoben, nicht überwunden. Es gibt aber Fälle, bei denen sich die Quellverteilungen leicht angeben lassen. Einer dieser Fälle liegt vor, wenn sich z. B. die Schaufel in der w-Ebene auf einen Kreis in der z-Ebene abbilden läßt. [$z_s = g_2(a)$ ist dann die Gleichung eines Kreises]. Bekanntlich liefert eine Quelle und eine gleichstarke in beliebiger Entfernung befindliche Senke Kreise als Stromlinien. Wenn man im vorliegenden Falle auf dem Kreise $z_s = g_2(a)$ immer eine Quelle und eine Senke von gleicher Stärke beliebig anordnen kann, dann wird der Kreis $g_2(a)$ selbst Stromlinie. Die c_n-Komponente an einer beliebigen Stelle wird dann nicht beeinflußt durch irgendeine Quelle oder Senke auf dem Kreis mit Ausnahme derjenigen, die an der betrachteten Stelle selbst liegt. Die Größe von c_n ist also an jeder Stelle proportional der dort befindlichen Quellstärke. Dadurch wird die Funktion für die Quellverteilung $q(a) = 2 g_3'(a)$ identisch mit der Funktion für die c_n-Komponente

$$q(a) = 2 c_n(a) \text{ oder } g_3'(a) = g_3(a) .$$

Damit ist die gesuchte Quellverteilung und das komplexe Potential gefunden.

Ein anderer Fall ist der im folgenden ausführlich behandelte. Der Bereich um die Schaufel in der w-Ebene wird abgebildet auf die obere Halbebene, der von der Schaufel umschlossene Bereich auf die untere Halbebene der z-Ebene. Die Schaufelkontur wird zur reellen Achse in der z-Ebene. Jede Quelle oder Senke, die auf dieser Achse angenommen wird, macht die Achse selbst zur Stromlinie, ruft also nur an der Stelle eine c_n-Komponente hervor, an der sie sich selbst befindet. Der allgemeine Parameter a wird in diesem Falle dargestellt durch die laufende Koordinate der reellen Achse, die im folgenden l genannt werden soll. Auch in diesem Falle wird $g_3'(l) = g_3(l) = c_n(l)$. Die Funktion für die Schaufelkontur wird:

$$g_2(l) = l; \; -\infty \leqq l \leqq +\infty \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Ferner ist $d s = d l$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_3(l) \ln (z - l) \, d l \quad . \quad . \quad . \quad (5), \qquad \frac{d \Phi}{d z} = c_x - i c_y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_3(l) \, d l}{z - l} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Dieses Integral ist zuerst von P. A. Walther angegeben worden. (Transactions of the Central-Aero-Hydrodynamical Institute, Nr. 18, Moskau 1926. Die Arbeit ist leider nur in russischer Sprache veröffentlicht worden.)

Man kann das komplexe Potential $\Phi(z)$ für jeden Punkt $z = x + i y$ als bestimmtes Integral über l als Integrationsvariable ausrechnen.

$$\frac{d \Phi}{d z} = c_x - i c_y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_3(l) [(x - l) - i y]}{(x - l)^2 + y^2} d l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Es soll jetzt noch einmal exakt bewiesen werden, daß $\lim\limits_{y \to 0} [\lim\limits_{x \to l} [c_y(x, y)]] = g_3(l) = c_n(l)$ ist. Durch Zerlegung von Gl. (7) in den reellen und den imaginären Anteil ergibt sich:

$$c_y = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_3(l) y \, d l}{(x - l)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_n(l) \, y \, d l}{(l - x)^2 + y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Für $(l-x)$ werde u eingesetzt; dann ist $dl = du$. Wenn $l = \pm\infty$, ist auch $u = \pm\infty$. Gl. (8) lautet jetzt also:

$$c_y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_n(u+x)\, y\, du}{u^2+y^2}.$$

Durch Zerlegen in drei Teilintegrale ergibt sich:

$$c_y = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{u_1} \frac{c_n(u+x)\, du}{u^2+y^2} + \frac{1}{\pi}\int_{u_1}^{u_2} \frac{c_n(u+x)\, y\, du}{u^2+y^2} + \frac{y}{\pi}\int_{u_2}^{+\infty} \frac{c_n(u+x)\, du}{u^2+y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

wobei $u_1 < 0 < u_2$. y ist für die Integration als Konstante aufzufassen. Das Integral $\Delta q = \int_{u_0}^{\infty} c_n(u)\, du$ stellt die auf dem Stück der reellen Achse $u > u_0$ erzeugte Wassermenge dar. Diese Wassermenge ist gleich der von dem entsprechenden Stück der rotierenden Schaufel in der w-Ebene verdrängten Wassermenge, muß also endlich sein. Das Integral kann aber nur dann einen endlichen Wert annehmen, wenn $[c_n(u)]_{u\to\infty} = 0 = \frac{1}{\infty^k}$, wobei k eine Zahl > 1 ist. Daraus ergibt sich aber ohne weiteres, daß das erste und letzte Integral der Gl. (9) ebenfalls endlich sein muß, weil der Integrand für $u \to \infty$ von mehr als dritter Ordnung unendlich klein wird. Folglich ist $\lim [y/\pi\,(J_1 + J_3)] = 0$.

Da die Funktion $F(u) = \frac{y}{y^2+u^2}$ dauernd das Vorzeichen von y hat, kann man das Integral J_2 mit dem Mittelwertsatz umformen.

$$\frac{1}{\pi} J_2 = \frac{1}{\pi} c_n(u_0 + x) \int_{u_1}^{u_2} \frac{y\, du}{u^2+y^2},$$

wobei $u_0 = u_1 + \vartheta(u_2 - u_1)$ und $0 < \vartheta < 1$.

$$\frac{1}{\pi} J_2 = \frac{1}{\pi} c_n(u_0 + x)\left[\operatorname{arctg}\frac{u_2}{y} - \operatorname{arctg}\frac{u_1}{y}\right].$$

Geht jetzt $y \to 0$, dann geht der $\operatorname{arctg} u_1/y \to -\pi/2$, weil $u_1 < 0$, und der $\operatorname{arctg} u_2/y \to +\pi/2$, weil $u_2 > 0$. Folglich wird

$$\lim_{y\to 0}\left[\frac{1}{\pi} J_2\right] = c_n[u_1 + \vartheta(u_2 - u_1) + x] = c_n(u_0 + x).$$

Um nun festzustellen, an welcher Stelle der Wert c_n von (u) genommen werden soll, läßt man die beiden Werte u_1 und u_2 gegen 0 rücken. An dem bisherigen Beweis ändert sich dadurch nichts. Da $u_1 < u_0 < u_2$, muß u_0 ebenfalls gegen 0 gehen. Es ergibt sich also:

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{\substack{u_1\\u_2}\}\to 0}\left(\frac{1}{\pi}\int_{u_1}^{u_2}\frac{c_n(u)\, y\, du}{u^2+y^2}\right)\right] = c_n(x).$$

Für $u = 0$ ist $x = l$ folglich:

$$\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to l}\left(c_y(x, y)\right)\right] = c_n(l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

2. Anwendung des Verfahrens. Zur praktischen Durchführung des oben geschilderten Verfahrens bei der allgemeinen Strömung durch das rotierende Kreiselrad (s. Spannhake a. a. O.) werde die Strömung in zwei Anteile zerlegt. Der eine Anteil, die Durchflußströmung, kommt zustande durch die in der Achse befindliche Wirbelquelle und die Zirkulationen um die Schaufeln bei stillstehendem Rade. Die Schaufeln sind Stromlinien, und man kann diese Strömung durch eine konforme Abbildung unmittelbar aus bekannten Potentialen herleiten. Der zweite Anteil, die Verdrängungsströmung, entsteht durch die Rotation des Schaufelrades in der sonst ruhenden Flüssigkeit. Das Potential für diese Strömung wird dargestellt durch das oben beschriebene Integral.

Im Pumpen- und Turbinenbau wendet man fast ausschließlich überdeckte Schaufeln an. Das sind Schaufeln, bei denen der bedeckte Zentriwinkel ψ größer ist als der Teilungswinkel:

$$\psi > 2\,\frac{\pi}{n} \quad \text{(Abb. 2)}.$$

Ein derartiges Laufrad mit Schaufeln, die durch Stücke von logarithmischen Spiralen gebildet werden, soll näher untersucht werden. Dazu wird die Abbildung benutzt, die König in dieser Zeitschr. Bd. 2 (1922), Heft 6, angegeben hat. Die Königsche Abbildung lautet folgendermaßen:

$$w_1 = e^{i\alpha} \ln \frac{z - z_a}{z - z_b} + e^{-i\alpha} \ln \frac{z - \bar{z}_a}{z - \bar{z}_b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

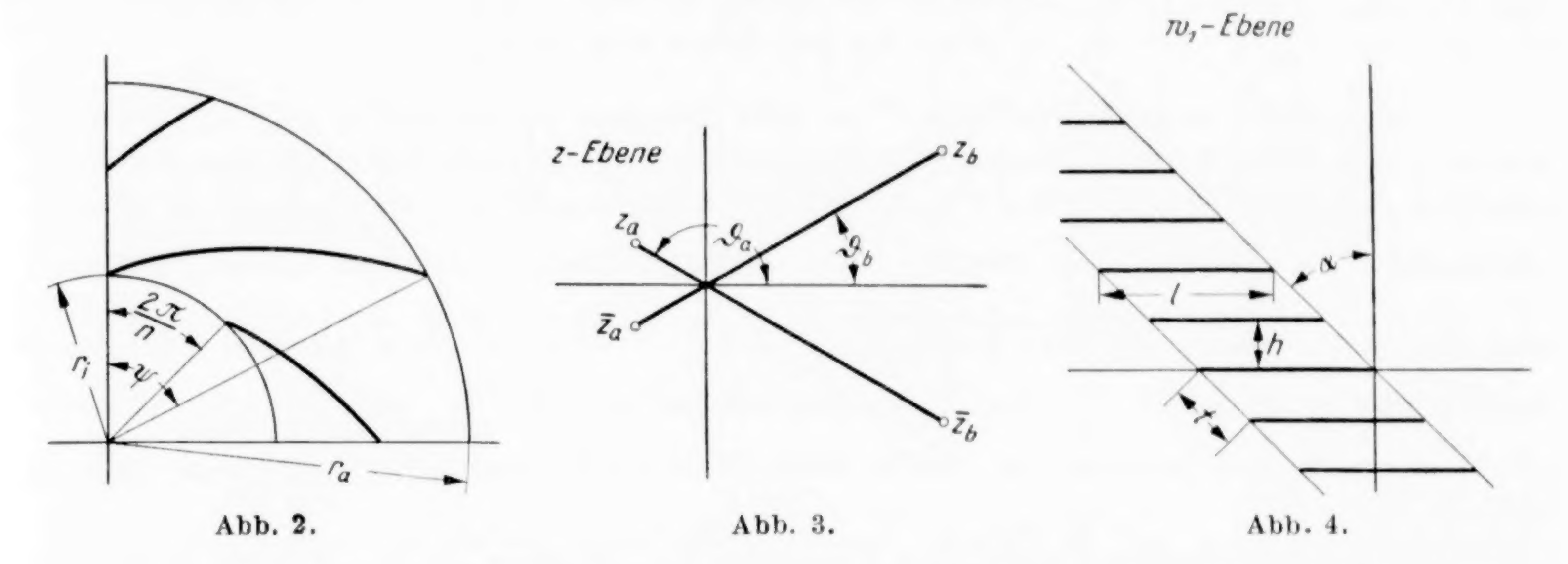


Abb. 2. Abb. 3. Abb. 4.

$z_a = x_a + i y_a = r_a e^{i\vartheta_a}$ und $z_b = x_b + i y_b = r_b e^{i\vartheta_b}$ sind zwei Punkte auf der positiven Halbebene der z-Ebene mit den Abständen von Nullpunkt r_a und r_b. $\bar{z}_a$ und $\bar{z}_b$ sind die dazu konjugierten Werte (Abb. 3). Die angegebene Funktion bildet die reelle Achse der z-Ebene auf ein Gitter von der in Abb. 4 dargestellten Form $a\,b$. Die einzelnen Gitterstäbe sind geradlinig und parallel der reellen Achse der w_1-Ebene. Ein Stab liegt in der reellen Achse selbst, und zwar auf der negativen Seite. Sein einer Endpunkt liegt im Nullpunkt. Die Länge der Gitterstäbe beträgt $l = 2 \cdot [\cos\alpha \cdot \ln r_a/r_b - (\vartheta_a - \vartheta_b) \cdot \sin\alpha]$. Die Gitterachse schließt mit der imaginären Achse der w_1-Ebene den Winkel α ein. $h = 2\pi \cos\alpha = t \cos\alpha$ ist der senkrechte Abstand zweier Gitterstäbe.

Nun ist (nach König a. a. O.):

$$\text{a)} \quad \pi \cdot l/h = \ln \frac{\sin(\vartheta_b + \alpha - \pi/2)}{\sin(\vartheta_b + \pi/2 - \alpha)} - (\pi - 2\,\vartheta_b)\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

$$\text{b)} \quad \vartheta_a + \vartheta_b = \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

$$\text{c)} \quad \frac{r_a}{r_b} = \frac{\sin(\vartheta_b + \alpha - \pi/2)}{\sin(\vartheta_b + \pi/2 - \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Durch die Abbildung wird nur das Verhältnis $r_a : r_b$ bestimmt, nicht die Werte von r_a und r_b selbst. Man kann einen der Absolutwerte beliebig wählen, z. B. $r_a = 1$. Dadurch werden die folgenden Rechnungen zum Teil erheblich vereinfacht, ohne daß die Allgemeinheit eingeschränkt wird. Es gelte jetzt also die folgende Beziehung:

$$x_a^2 + y_a^2 = r_a^2 = 1 \quad \text{und ferner, weil} \quad \vartheta_a = \pi - \vartheta_b, \quad x_a r_b = -x_b \quad . \quad (15),$$

$$y_a \cdot r_b = y_b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Aus der Transformationsgleichung ergibt sich:

$w_1 = -\infty$, wenn $z = z_a$ oder $z = \bar{z}_a$, $\quad w_1 = 0$, wenn $z = \infty$,

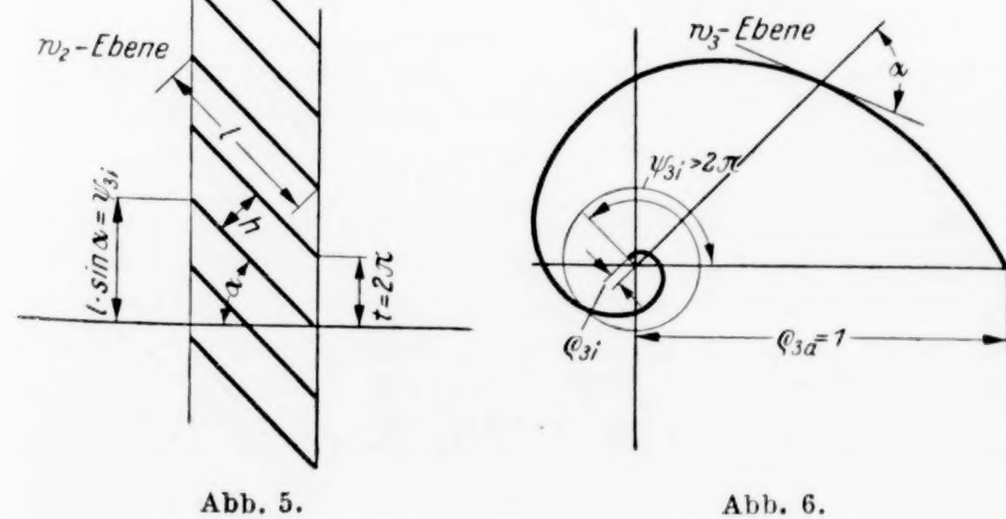


Abb. 5. Abb. 6.

$w_1 = +\infty$, wenn $z = z_b$ oder $z = \bar{z}_b$.

Die Bildpunkte von z_a, $\bar{z}_a$, z_b, $\bar{z}_b$ rücken also in der w_1-Ebene in das unendlich Ferne, während der Bildpunkt von $z = \infty$ in den 0-Punkt rückt.

Durch die Transformation $w_2 = w_1 \cdot e^{-i\alpha}$ wird das Gitter um den Winkel α im Sinn des Uhrzeigers um den 0 Punkt gedreht (Abb. 5). Die

Gitterachse steht jetzt senkrecht zur reellen Achse, mit der die Gitterstäbe den Winkel α einschließen.

Durch die Transformation $w_3 = e^{w_2}$ wird ein Streifen der w_2-Ebene von der Breite $2\pi i$ auf ein Blatt einer w_3-Ebene abgebildet. ($w_3 = \varrho_3 \cdot e^{i\psi_3}$). Die Punkte sämtlicher Gitterstäbe liegen jetzt auf einer logarithmischen Spirale, die jeden Strahl aus dem 0 Punkt unter dem Winkel α schneidet (Abb. 6). Der rechte Endpunkt der Gitterstäbe entspricht dem Punkt $\varrho_3 = \varrho_{3a} = 1$; $\psi_{3a} = 0$ in der w_3 Ebene, der linke Endpunkt entspricht dem Punkt $\varrho_3 = \varrho_{3i} = e^{-l\cos\alpha}$; $\psi_3 = \psi_{3i} = l \sin\alpha$ (in der Zeichnung ist $\psi_{3i} > 2\pi$).

Durch die Transformation $w = \sqrt[n]{w_3}$ wird das eine Spiralenstück der w_3-Ebene auf n Stücke von logarithmischen Spiralen in der w-Ebene abgebildet; diese Spiralen schneiden ebenfalls jeden 0-Strahl unter dem Winkel α (Abb. 2). Dem Punkte $\varrho_{3a} = 1$, $\psi_{3a} = 0$ entsprechen die n Punkte $\sqrt[n]{1} = 1 \cdot e^{ik\frac{2\pi}{n}}$; $k = 0, 1, 2$ bis $n - 1$. Die inneren Schaufel-(Spiralen)enden liegen auf dem Kreise mit $\varrho_i = \sqrt[n]{\varrho_{3i}}$. Der von einer Schaufel überdeckte Zentriwinkel ψ ist gleich $\frac{\psi_{3i}}{n}$; der Teilungswinkel ist gleich $\frac{2\pi}{n}$. Als Ueberdeckungsverhältnis m werde der Quotient von überdecktem Zentriwinkel und Teilungswinkel bezeichnet (Abb. 5):

$$m = \frac{\psi}{\frac{2\pi}{n}} = \frac{\psi_{3i}}{2\pi} = \frac{l\sin\alpha}{t} = l\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{h} = \frac{l}{h}\frac{\sin 2\alpha}{2} \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

Man kann die verschiedenen aufeinanderfolgenden Abbildungsfunktionen in eine einzige zusammenfassen. Aus

$$w_1 = e^{i\alpha}\ln\frac{z-z_a}{z-z_b} + e^{-i\alpha}\ln\frac{z-\bar{z}_a}{z-\bar{z}_b}; \quad w_2 = w_1 \cdot e^{-i\alpha}; \quad w_3 = e^{w_2}; \quad w = \sqrt[n]{w_3} \text{ folgt:}$$

$$w = \left[\left(\frac{z-z_a}{z-z_b}\right)^{e^{i\alpha}} \cdot \left(\frac{z-\bar{z}_a}{z-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}}\right]^{1/n \cdot e^{-i\alpha}} \quad \ldots\ldots \quad (18).$$

Das ist die Funktion, die die reelle Achse der z-Ebene auf einen Schaufelstern mit n-Schaufeln in der w-Ebene abbildet. In dieser Funktion sind α, z_a und z_b noch unbestimmt. α ist der Winkel, den die Schaufel mit dem Radius einschließt, während z_a und z_b aus den Gl. (12), (13) und (14) bestimmt werden, wenn man ein bestimmtes Radien- oder Ueberdeckungsverhältnis vorschreibt. Aus m bestimmt man mit Gl. (17) zunächst l/h, dann mit Gl. (12) ϑ_b und zuletzt mit Gl. (14) r_a/r_b.

3. Das Potential für die Durchflußströmung. Die Transformationsgleichung (18) zeigt, daß für $z = z_a$ $w = 0$ und für $z = z_b$ $w = \infty$ wird. Für die Durchflußströmung muß der Punkt $w = 0$ Wirbelquelle und der Punkt $w = \infty$ Wirbelsenke werden. Im Punkt z_a der z-Ebene muß also eine Wirbelquelle und im Punkte z_b eine Wirbelsenke angeordnet werden. Damit die reelle Achse Stromlinie wird, muß die Wirbelquelle und die -senke in den Punkten $\bar{z}_a$ und $\bar{z}_b$ gespiegelt werden. Das Potential für die Durchflußströmung in der z-Ebene lautet also:

$$\Phi_d(z) = (q + i\,m)\cdot\ln(z - z_a) + (s + i\,o)\ln(z - z_b) + (q - i\,m)\ln(z - \bar{z}_a)$$
$$+ (s - i\,o)\cdot\ln(z - \bar{z}_b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19),$$

(s. König a. a. O.). q ist die Ergiebigkeit der Quellen, s die Schluckfähigkeit der Senken, m und o sind Wirbelstärken. Die Kontinuität wird nur dann erfüllt, wenn $q = -s$, weil im Unendlichen keine Senke sein darf.

4. Das Potential für die Verdrängungsströmung. Durch die Rotation des Schaufelrades in der w-Ebene entstehen an der Schaufeloberfläche Normalkomponenten der Wassergeschwindigkeit $v_n = \omega \cdot |w| \cdot \cos\alpha$. Durch die Funktion (18) werden die Schaufeln der w-Ebene abgebildet auf die reelle Achse der z-Ebene. Jeder Punkt $z = l$ dieser reellen Achse entspricht also einem Schaufelpunkt w. Dabei schwankt l von $-\infty$ bis $+\infty$. $-\infty \leqq l \leqq +\infty$. Es muß jetzt ein Potential gefunden werden, das an jedem Punkte l eine Normalgeschwindigkeit hervorruft:

$$c_n = v_n \left|\frac{dw}{dz}\right|_{(z=l)} = \omega\,|w_s|\cos\alpha\cdot\left|\frac{dw}{dz}\right|_{(z=l)}, \qquad w = \left[\left(\frac{z-z_a}{z-z_b}\right)^{e^{i\alpha}}\cdot\left(\frac{z-\bar{z}_a}{z-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}}\right]^{1/n}\cdot e^{-i\alpha},$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{n}\,e^{-i\alpha}\cdot\left[\left(\frac{z-z_a}{z-z_b}\right)^{e^{i\alpha}}\cdot\left(\frac{z-\bar{z}_a}{z-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}}\right]^{1/n\,e^{-i\alpha}-1}\cdot\left[e^{i\alpha}\cdot\left(\frac{z-\bar{z}_a}{z-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}}\cdot\left(\frac{z-z_a}{z-z_b}\right)^{e^{i\alpha}-1}\cdot\frac{z_a-z_b}{(z-z_b)^2}\right.$$

$$\left.+\,e^{-i\alpha}\left(\frac{z-z_a}{z-z_b}\right)^{e^{i\alpha}}\cdot\left(\frac{z-\bar{z}_a}{z-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}-1}\cdot\frac{\bar{z}_a-\bar{z}_b}{(z-\bar{z}_b)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\,e^{-i\alpha}\left[\left(\frac{z-z_a}{z-z_b}\right)^{e^{i\alpha}}\cdot\left(\frac{z-\bar{z}_a}{z-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}}\right]^{1/n\,e^{-i\alpha}}\cdot\left[\frac{(z_a-z_b)\cdot e^{i\alpha}}{(z-z_a)\,(z-z_b)}+\frac{(\bar{z}_a-\bar{z}_b)\,e^{-i\alpha}}{(z-\bar{z}_a)\,(z-\bar{z}_b)}\right] \quad (20).$$

Für reelles $z = l$ werden die Größen in den beiden eckigen Klammern selbst reell, weil sie in diesem Fall aus einem Produkt bzw. einer Summe von konjugiert komplexen Zahlen bestehen. Außerdem ist $|e^{-i\alpha}| = 1$. Der Absolutwert von $\frac{dw}{dz}$ läßt sich daher, wenn für z der reelle Wert l gesetzt wird, folgendermaßen schreiben:

$$\left|\frac{dw}{dz}\right|_{(z=l)} = \frac{1}{n}\left|\left[\left(\frac{l-z_a}{l-z_b}\right)^{e^{i\alpha}}\cdot\left(\frac{l-\bar{z}_a}{l-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}}\right]^{e^{-i\alpha}\,1/n}\right|\cdot\left[\frac{(z_a-z_b)\,e^{i\alpha}}{(l-z_a)\,(l-z_b)}+\frac{(\bar{z}_a-\bar{z}_b)\,e^{-i\alpha}}{(l-\bar{z}_a)\,(l-\bar{z}_b)}\right] \quad (21).$$

Folglich ist an der Schaufel:

$$c_n = \frac{1}{n}\,\omega\cos\alpha\left|\left[\left(\frac{l-z_a}{l-z_b}\right)^{e^{i\alpha}}\cdot\left(\frac{l-\bar{z}_a}{l-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}}\right]^{2/n\,e^{-i\alpha}}\right|\cdot\left[\frac{(z_a-z_b)\,e^{i\alpha}}{(l-z_a)\,(l-z_b)}+\frac{(\bar{z}_a-\bar{z}_b)\,e^{-i\alpha}}{(l-\bar{z}_a)\,(l-\bar{z}_b)}\right] \quad (22).$$

Jetzt werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\frac{l-z_a}{l-z_b} = \mu\cdot e^{i\nu} \quad \text{und} \quad \frac{l-\bar{z}_a}{l-\bar{z}_b} = \mu\cdot e^{-i\nu} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (23),$$

$$\frac{l-z_a}{l-z_b} = \frac{(l-z_a)\,(l-\bar{z}_b)}{(l-z_b)\,(l-\bar{z}_b)} = \frac{(l-x_a-i\,y_a)\,(l-x_b+i\,y_b)}{(l-x_b-i\,y_b)\,(l-x_b+i\,y_b)}$$

$$= \frac{(l-x_a)\,(l-x_b)+y_a\,y_b+i\,[(l-x_a)\,y_b-(l-x_b)\,y_a]}{(l-x_b)^2+y_b^2} = \mu\cdot e^{i\nu}.$$

Folglich ist der Absolutwert und das Argument:

$$\mu = \frac{\sqrt{[(l-x_a)\,(l-x_b)+y_a\,y_b]^2+[(l-x_a)\,y_b-(l-x_b)\,y_a]^2}}{(l-x_b)^2+y_b^2} = \mu\,(l) \quad .\ .\ . \quad (24)$$

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{(l-x_a)\,y_b-(l-x_b)\,y_a}{(l-x_a)\,(l-x_b)+y_a\,y_b}; \qquad \nu = \nu\,(l) \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (25)$$

$$\left(\frac{l-z_a}{l-z_b}\right)^{e^{i\alpha}} = (\mu\,e^{i\nu})^{e^{i\alpha}} = \mu^{\cos\alpha}\cdot e^{-\nu\sin\alpha}\cdot e^{i(\ln\mu\sin\alpha+\nu\cos\alpha)}$$

$$\left(\frac{l-\bar{z}_a}{l-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}} = \qquad = \mu^{\cos\alpha}\cdot e^{-\nu\sin\alpha}\cdot e^{-i(\ln\mu\sin\alpha+\nu\cos\alpha)}$$

Folglich ist:

$$\left(\frac{l-z_a}{l-z_b}\right)^{e^{i\alpha}}\cdot\left(\frac{l-\bar{z}_a}{l-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}} = \mu^{2\cos\alpha}\cdot e^{-2\nu\sin\alpha} \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (26).$$

Jetzt soll der Ausdruck (26) noch mit ${}^2/_n\cdot e^{-i\alpha}$ potenziert werden

$$[\mu^{2\cos\alpha}\cdot e^{-2\nu\sin\alpha}]^{2/n\,(\cos\alpha-i\sin\alpha)} = \mu^{2/n\,(1+\cos 2\alpha)}\cdot e^{-2/n\,\nu\sin 2\alpha}\cdot e^{i\,2/n\,(\ln\mu\sin 2\alpha-2\nu\sin^2\alpha)}.$$

Folglich ist der Absolutwert:

$$\left|\left[\left(\frac{l-z_a}{l-z_b}\right)^{e^{i\alpha}}\cdot\left(\frac{l-\bar{z}_a}{l-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}}\right]^{2/n\,e^{-i\alpha}}\right| = \mu^{2/n\,(1+\cos 2\alpha)}\cdot e^{-2/n\,\nu\sin 2\alpha} = M\,(l)^{1/n} \quad (27).$$

Jetzt soll noch der letzte Faktor von (22) umgeformt werden:

$$\frac{(z_a-z_b)\,e^{i\alpha}}{(l-z_a)\,(l-z_b)}+\frac{(\bar{z}_a-\bar{z}_b)\,e^{-i\alpha}}{(l-\bar{z}_a)\,(l-\bar{z}_b)} = \frac{(z_a-z_b)\,(l-\bar{z}_a)\,(l-\bar{z}_b)\,e^{i\alpha}+(\bar{z}_a-\bar{z}_b)\,(l-z_a)\,(l-z_b)\,e^{-i\alpha}}{(l-z_a)\,(l-z_b)\,(l-\bar{z}_a)\,(l-\bar{z}_b)}$$

Dieser Ausdruck findet sich auch in dem Aufsatz von König [a. a. O. Gl. (5)]. Dort ist auch die Bedingung ausgesprochen, daß der Koeffizient von l^2 und das von l freie Glied im Zähler gleich 0 werden müssen. Diese Bedingung wird bereits erfüllt

durch die Gleichungen (12), (13), (14). Unter Berücksichtigung dieses Umstandes ergibt sich durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen

$$\frac{(z_a - z_b)\, e^{i\alpha}}{(l - z_a)(l - z_b)} + \frac{(\bar{z}_a - \bar{z}_b)\, e^{-i\alpha}}{(l - \bar{z}_a)(l - \bar{z}_b)} = \frac{2\, l\,[\cos\alpha\,(x_b^2 - x_a^2 + y_b^2 - y_a^2) - 2\sin\alpha\,(x_a y_b - x_b y_a)]}{[(l - x_a)^2 + y_a^2]\,[(l - x_b)^2 + y_b^2]} \quad (28).$$

Damit ist c_n als reelle Funktion von l bestimmt:

$$c_n(l) = {}^1/_n\, \omega \cos\alpha\, \mu(l)^{2/n\,(1+\cos 2\alpha)} \cdot e^{2/n\,\nu \sin 2\alpha} \cdot \frac{k \cdot l}{[(l - x_a)^2 + y_a^2]\,[(l - x_b)^2 + y_b^2]} \quad (29)$$

$$k = 2\,[\cos\alpha\,(x_b^2 - x_a^2 + y_b^2 - y_a^2) - 2\sin\alpha\,(x_a y_b - x_b y_a)] \quad . \quad . \quad (30)$$

k ist also von l unabhängig, während $\mu(l)$ und $\nu(l)$, die durch Gl. (24) und (25) gegebene Bedeutung haben. $\mu(l)$ ist als absoluter Betrag immer größer als 0. $\lim\limits_{l \to \infty} \mu(l) = 1$, weil Zähler und Nenner von gleichem Grade sind und die höchsten Potenzen von l im Zähler und Nenner den Faktor 1 haben. $\nu(l)$ schwankt zwischen den Grenzen $\nu_{max} > 0$ und $\nu_{min} < 0$; $\lim\limits_{l \to \infty} \nu(l) = 0$, weil der Nenner von höherem Grade ist als der Zähler. $M(l) = \mu(l)^{2(1+\cos 2\alpha)} \cdot e^{-2\nu(l)\sin 2\alpha}$ ist immer positiv und endlich

$$\lim_{l \to \infty} M(l) = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

$$\lim_{n \to \infty} [M(l)^{1/n}] \equiv 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

$c_n(l)$ wird von erster Ordnung zu 0, wenn $l \to 0$.

Außerdem gilt $[c_n(l)]_{l \to \infty} = 0$ von der dritten Ordnung, weil nach Gl. (29) der Nenner des letzten Faktors 3 Grade höher ist als der Zähler.

Das Potential für die Verdrängungsströmung in der z-Ebene lautet gemäß Gl. (5)

$$\Phi_v(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c_n(l) \ln(z - l)\, d\,l\,, \quad \text{wobei } c_n(l)$$

die oben bestimmte Bedeutung hat. Das vollständige Potential für die zusammengesetzte Durchfluß- und Verdrängungsströmung ist gleich der Summe der Einzelpotentiale.

$$\Phi(z) = \Phi_d(z) + \Phi_v(z) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33).$$

Die dazu gehörige Abbildungsfunktion wird durch Gl. (18) angegeben.

5. Geschwindigkeiten an den Schaufelenden. In dem komplexen Potential (33) stehen eine Reihe von Größen, deren Wahl die Möglichkeit bietet, die verschiedenartigsten Strömungen darzustelllen (ω, p, o, m). Mathematisch können diese Größen beliebig gewählt werden, ohne daß die einzige Bedingung verletzt wird, die bis jetzt gestellt worden ist. Das ist die Kontinuitätsbedingung, die ihren Ausdruck findet in der Differentialgleichung von Laplace

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung stellt das komplexe Potential (33) dar. Praktisch, d. h. physikalisch bestehen nun aber noch 2 weitere Bedingungen, die die Möglichkeit einer vollständig beliebigen Wahl aller dieser Größen ausschließt. Die eine Bedingung, mit deren Erfülltsein man praktisch immer rechnen kann, besagt, daß das Wasser von den Laufradschaufeln tangential abströmt. Die andere Bedingung wird zwar praktisch meistens nicht erfüllt, man sucht sie aber im Betriebe möglichst genau zu erfüllen. Das ist die Bedingung, daß das Wasser den Laufradschaufeln tangential zuströmt, oder, wie der Pumpenbauer sagt, daß stoßfreier Eintritt besteht. Wenn beide Bedingungen zusammen erfüllt werden, dann hat die Pumpe ungefähr ihren besten Wirkungsgrad. Man sagt, sie arbeitet in ihrem Normalbetriebszustand. Dieser Zustand soll der weiteren Untersuchung zugrunde gelegt werden. Die bei weitem meisten Pumpen haben vor dem Laufrad keinen Leitapparat; das Wasser strömt also dem Laufrade ohne innere Zirkulation zu. Das würde bedeuten, daß $m = 0$ gesetzt werden müßte. Zunächst soll das aber nicht geschehen, um die Allgemeinheit nicht zu stark einzuschränken. Die genannten physikalischen Bedingungen lauten mathematisch ausgedrückt, daß die Ableitung des Potentials $\Phi(w)$ in der w-Ebene an den Punkten, die den Schaufelenden entsprechen, einen endlichen Wert behält. Das nicht tangentiale Zu- oder Abströmen ist nämlich immer (mathematisch!) mit

dem Auftreten von unendlich großen Geschwindigkeiten verbunden. Es muß also sein $b \leq \left|\frac{d\Phi}{dw}\right|_{\substack{w=w_{si}\\ w=w_{sa}}} \leq B$, wobei b und B zwei endliche Größen sind, und w_{si} und w_{sa} den inneren bzw. äußeren Schaufelendpunkt bezeichnen. Den Punkten w_{si} und w_{sa} entsprechen in der z-Ebene die Punkte $z = 0$ bzw. $z = \infty$. Nun ist $\frac{d\Phi(w)}{dw} = \frac{d\Phi(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dw}$. Folglich:

$$b \leq \left|\frac{d\Phi(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dw}\right|_{\substack{z=0\\ z=\infty}} \leq B$$

$$\frac{dz}{dw} = n\, e^{i\alpha}\left[\left(\frac{z-z_a}{z-z_b}\right)^{e^{i\alpha}} \cdot \left(\frac{z-\bar{z}_a}{z-\bar{z}_b}\right)^{e^{-i\alpha}}\right]^{-1/n \cdot e^{-i\alpha}} \cdot \frac{(z-z_a)(z-z_b)(z-\bar{z}_a)(z-\bar{z}_b)}{k \cdot z}$$

unter Berücksichtigung von Gl. (20), (28) und (30).

$\left|\frac{dz}{dw}\right|_{z=0}$ wird also unendlich von der ersten Ordnung, weil die ersten Faktoren und der Zähler des letzten Faktors endlich bleiben, während der Nenner des letzten Faktors linear $= 0$ wird. Damit $\frac{d\Phi(w)}{dw}$ einen endlichen Wert behält, muß also $\frac{d\Phi(z)}{dz} = 0$ von der ersten Ordnung werden, wenn man $z = 0$ setzt. Die erste Bedingungsgleichung (für stoßfreien Eintritt) lautet demnach:

$$\left[\frac{d\Phi_d(z)}{dz} + \frac{d\Phi_v(z)}{dz}\right]_{z=0} = 0.$$

Nun ist:

$$\frac{d\Phi_d(z)}{dz} = \frac{q+im}{z-z_a} + \frac{s+io}{z-z_b} + \frac{q-im}{z-\bar{z}_a} + \frac{s-io}{z-\bar{z}_b}$$

$$\left[\frac{d\Phi_d(z)}{dz}\right]_{z=0} = -\left(\frac{q+im}{z_a} + \frac{s+io}{z_b} + \frac{q-im}{\bar{z}_a} + \frac{s-io}{\bar{z}_b}\right) = -2\left(\frac{q\,x_a - m\,y_a}{x_a^2 + y_a^2} + \frac{s\,x_b - o\,y_b}{x_b^2 + y_b^2}\right).$$

Das komplexe Potential für die Verdrängungsströmung lautet:

$$\Phi_v(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(l, z)\, dl\,, \quad \text{wobei} \quad F(l, z) = c_n(l) \ln(z - l)$$

ist. Die Funktion $F(l, z)$ erfüllt folgende Bedingungen:

1. $F(l, z)$ und die partielle Ableitung $\frac{\partial F(l,z)}{\partial z} = \frac{c_n(l)}{z-l}$ sind stetig für jedes beliebige l und für jedes $z \neq l$.
2. $F(l, z)$ und $\frac{\partial F(l,z)}{\partial z}$ werden von höherer als erster Ordnung unendlich klein, wenn $l \to \pm\infty$ geht. Man kann daher die Ableitung bilden, indem man unter dem Integralzeichen differenziert [1])

$$\frac{d\Phi_v(z)}{dz} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_n(l)\, dl}{z-l}\,,$$

$$\left[\frac{d\Phi_v(z)}{dz}\right]_{z=0} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_n(l)\, dl}{l} = -\frac{1}{\pi} N_2 \quad . \quad (34) \qquad \text{mit} \quad N_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_n(l)\, dl}{l} \quad . \quad (35),$$

so daß die Bedingungsgleichung die Gestalt annimmt:

$$\left[\frac{d\Phi(z)}{dz}\right]_{z=0} = -2\left(\frac{q\,x_a - m\,y_a}{1} + \frac{s\,x_b - o\,y_b}{r_b^2}\right) - \frac{1}{\pi} N_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Um die Bedingung für das tangentiale Abfließen aufstellen zu können, müssen die Ableitungen $\frac{d\Phi d(z)}{dz}$ und $\frac{d\Phi v(z)}{dz}$ in Reihen nach fallenden Potenzen von z entwickelt werden.

$$\frac{d\Phi_d(z)}{dz} = \frac{(q+im)(z-\bar{z}_a) + (q-im)(z-z_a)}{(z-z_a)(z-\bar{z}_a)} + \frac{(s+io)(z-\bar{z}_b) + (s-io)(z-z_b)}{(z-z_b)(z-\bar{z}_b)}.$$

[1]) Picard, Traité d'analyse, Bd. I, Kap. 1, 1. Aufl. Nr. 19, 2. Aufl. Nr. 27.

Durch Ausdividieren der Quotienten ergibt sich:

$$\frac{d\,\Phi_a(z)}{d\,z} = \frac{2}{z}(q+s) + \frac{2}{z^2}(q\,x_a - m\,y_a + s\,x_b - o\,y_b) + \frac{2}{z^3}(\ldots) + \ldots\ldots \quad (37),$$

$$\frac{d\,\Phi_v(z)}{d\,z} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_n(l)\,d\,l}{z-l} = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{z}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}c_n(l)\,d\,l + \frac{1}{z^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}c_n(l)\,l\,d\,l + \frac{1}{z^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_n(l)\,l^2\,d\,l}{z-l}\right\} \quad (38),$$

weil
$$\frac{1}{z-l} = \frac{1}{z} + \frac{l}{z^2} + \frac{l^2}{z^2}\cdot\frac{1}{z-l}\,.$$

Jetzt soll zunächst gezeigt werden, daß das $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_n(l)\,l^2\,d\,l}{z-l}$ gleich Null wird, wenn $z\to\infty$ geht. Zu dem Zweck muß $c_n(l)\,l^2 = f(l)$ in eine Potenzreihe von $(1/l)$ entwickelt werden.

$$c_n(l)\,l^2 = a\,\mu(l)^b\cdot e^{c\,\nu(l)}\cdot\frac{l^3}{l^4 + d\,l^3 + e\,l^2 + f\,l + g}\,.$$

Die drei von l abhängigen Faktoren lassen sich sämtlich darstellen als Potenzreihen von $(1/l)$, die innerhalb eines bestimmten Intervalls $-r_1 < 1/l < r_2$, das auch den Punkt $1/l = 0$ mit einschließt, absolut konvergieren. Auch das Produkt dieser drei Faktoren läßt sich dann als Potenzreihe für $(1/l)$ mit einem bestimmten Konvergenzintervall darstellen. Wie schon oben gezeigt, ist $\lim\limits_{l\to\infty}(c_n(l)\cdot l^2 = 0$ von der ersten Ordnung. Die Potenzreihe hat also folgende Form:

$$c_n(l)\,l^2 = \frac{a_1}{l} + \frac{a_2}{l^2} + \frac{a_3}{l^3} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{l^n} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

und konvergiert in dem Intervall $\varrho_1 = 1/l_1' < 1/l < 1/l_2' = \varrho_2$. Dabei ist $l_1' < 0$ und $l_2' > 0$. Für alle Werte innerhalb des Konvergenzintervalles konvergiert die Reihe absolut, d. h. dann, wenn $l < l_1'$ oder $l > l_2'$ ist. Die Grenzen des Konvergenzintervalles sind nebensächlich; wichtig ist nur, daß ein solches Intervall mit endlichen Grenzen l_1' und l_2' besteht.

Das zu untersuchende Integral werde in drei Teilintegrale zerlegt:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_n(l)\,l^2\,d\,l}{z-l} = \int\limits_{-\infty}^{l_1}\frac{c_n(l)\,l^2\,d\,l}{z-l} + \int\limits_{l_1}^{l_2}\frac{c_n(l)\,l^2\,d\,l}{z-l} + \int\limits_{l_2}^{+\infty}\frac{c_n(l)\,l^2\,d\,l}{z-l}$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

$l_1 < l_1' < 0$ und $l_2 > l_2' > 0$. Das Integral J_2 konvergiert für wachsendes z gegen 0, weil es endliche Grenzen hat und weil daher $\lim\limits_{z\to\infty}(z-l) = \infty$; $\lim J_2 = 0$ von der ersten Ordnung.

Um die Integrale J_1 und J_3 abschätzen zu können, werde der Ausdruck $\frac{c_n(l)\,l^2}{z-l}$ umgeformt, indem zunächst für $c_n(l)\,l^2$ die Potenzreihe eingesetzt wird:

$$\frac{c_n(l)\,l^2}{z-l} = \frac{a_1}{l(z-l)} + \frac{a_2}{l^2(z-l)} + \frac{a_3}{l^3(z-l)} + \ldots\ldots$$

Von dem beliebigen Gliede $\frac{1}{l^n(z-l)}$ werde ein Partialbruch mit dem Nenner $z-l$ abgespalten und der Rest nach Potenzen von l^{-1} entwickelt.

$$\frac{1}{l^n(z-l)} = \frac{1}{z^n(z-l)} + \frac{1}{z^n\,l} + \frac{1}{z^{n-1}\,l^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{z\,l^n}\,.$$

Dann wird:

$$\frac{c_n(l)\,l^2}{z-l} = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\left\{\frac{1}{z^n(z-l)} + \frac{1}{z^n\,l} + \ldots\ldots + \frac{1}{z\,l^n}\right\}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{|l^n(|z|-|l|)} = \frac{1}{|z|^n(|z|-|l|)} + \frac{1}{|z|^n\,|l|} + \frac{1}{|z|^{n-1}\,|l|^2} + \ldots + \frac{1}{|z|\,|l|^n},$$

also

$$\frac{1}{|z|^n\,|z-l|} - \frac{1}{|z^n|(|z|-|l|)} + \frac{1}{|l^n|(|z|-|l|)} = \frac{1}{|z|^n\,|z-l|} + \frac{1}{|z|^n\,|l|} + \frac{1}{|z|^{n-1}\,|l|^2} + \ldots + \frac{1}{|z|\,|l|^n}\,.$$

Multiplikation mit $|a_n|$ und Summation ergibt:

$$\left(\frac{1}{(z-l)}-\frac{1}{|z|-|l|}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{|z|^n}+\frac{1}{(|z|-|l|)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{|l|^n}=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\cdot\left\{\frac{1}{|z|^n\,|z-l|}+\frac{1}{|z|^n\,|l|}+\ldots+\frac{1}{|z|\,|l|^n}\right\}.$$

Die beiden Reihen auf der linken Seite konvergieren aber absolut, wenn nur $|z|$ sowohl als auch l in den Konvergenzbereich der Entwicklung (39) $c_n(l)\,l^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{l^n}$ fallen. Also konvergiert auch die Reihe auf der rechten Seite absolut und erfüllt somit die Bedingungen für den großen Umordnungssatz. Durch Umordnen ergibt sich:

$$\frac{c_n(l)\,l^2}{z-l}=\sum_{n-1}^{\infty}a_n\left\{\frac{1}{z^n(z-l)}+\frac{1}{z^n l}+\ldots+\frac{1}{z\,l^n}\right\}=\left(\frac{1}{z-l}-\frac{1}{l}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}+\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{z^\lambda}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{a\lambda+r}{l^{r+1}}.$$

Nun ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{z^\lambda}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{a\lambda+r}{l^{r+1}}=\frac{1}{z}\,\frac{1}{l^2}\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{z^{\lambda-1}}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{a\lambda+1}{l^{r-1}}.$$

Diese Doppelreihe beginnt mit einem Gliede, das $1/l^2$ enthält; sie kann also von $-\infty$ bis $l_1<0$ und von $l_2>0$ bis $+\infty$ integriert werden, wenn l_1 und l_2 im Konvergenzbereich liegen. Der Wert dieser Integrale geht gegen Null, wenn $z\to\infty$ geht[1]. Es bleiben noch die beiden Integrale $s_1\int_{-\infty}^{l_1}\left(\frac{1}{z-l}+\frac{1}{l}\right)d\,l$ und $s_1\int_{l_2}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-l}+\frac{1}{l}\right)d\,l$ zur näheren Untersuchung übrig. $\left(s_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}\right)$ Zunächst werde der folgende Ausdruck ausgerechnet:

$$s_1\int_{l_u}^{l_1}\frac{d\,l}{z-l}+s_1\int_{l_2}^{l_0}\frac{d\,l}{z-l}=-\,s_1\ln\frac{z-l_1}{z-l_u}-s_1\ln\frac{z-l_0}{z-l_2}=-\,s_1\ln\frac{(z-l_1)\,(z-l_0)}{(z-l_u)\,(z-l_2)}.$$

Bekanntlich hängt der Grenzwert, dem derartige Ausdrücke zustreben, wenn $l_0\to+\infty$ und $l_u\to\infty$ gehen, von der Art ab, in der das geschieht. Der Grenzwert fällt z. B. verschieden aus, wenn man $l_0=l_u$ oder wenn man $l_0=l_u^2$ setzt und dann zur Grenze übergeht. Nun sind aber in diesem Falle die Grenzübergänge gegeben durch die Art der Abbildungsfunktion $w=f(z)$ l_0 und l_u seien die beiden Werte in der z-Ebene, die zu demselben Punkte der Schaufel in der w-Ebene gehören. Wenn nun w gegen das dem Nullpunkt abgewandte Ende der Schaufel vorrückt, dann gehen l_0 und l_u gegen unendlich und zwar so, daß $\left|\frac{l_0}{l_u}\right|=1$ wird (vergl. Gl. (22) und (23).

In dem Ausdruck

$$\lim_{z\to\infty}\left[\lim_{\substack{l_0\to+\infty\\ l_u\to-\infty}}\left[\ln\frac{(z-l_1)\,(z-l_0)}{(z-l_u)\,(z-l_2)}\right]\right]$$

muß man also $|l_0|=|l_u|$ setzen. Dann erhält man:

$$\lim_{z\to\infty}\left[\lim_{\substack{l_0\to+\infty\\ l_u\to-\infty}}\left[\ln\frac{(z-l_1)\,(z-l_0)}{(z-l_u)\,(z-l_2)}\right]\right]=\lim_{z\to\infty}\left[\ln\frac{z-l_1}{z-l_2}\right]=0\,.$$

Ebenso findet man für:

$$\int_{-\infty}^{l_1}\frac{a_1\,d\,l}{l}+\int_{l_2}^{+\infty}\frac{a_1\,d\,l}{l}=a_1\lim_{\substack{l_0\to+\infty\\ l_u\to-\infty}}\left[\ln\frac{l_1\cdot l_0}{l_u\cdot l_2}\right]=a_1\ln\frac{l_1}{l_2}\,.$$

Durch Zusammenfassung sämtlicher Teilergebnisse erhält man:

$$\lim_{z\to\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_n(l)\,l^2\,d\,l}{z-l}\right]=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(40).$$

[1] Diesen Konvergenzbeweis sowie verschiedene Hinweise für die mathematische Behandlung verdankt der Verfasser Herrn Prof. Boehm, Karlsruhe.

Jetzt sind die beiden Ableitungen $\frac{d\,\Phi_a(z)}{d\,z}$ und $\frac{d\,\Phi_v(z)}{n\,z}$ entwickelt nach fallenden Potenzen von z. Für $z \to \infty$ sollen die Ableitungen von der dritten Ordnung zu 0 werden. Das wird dadurch möglich gemacht, daß die Koeffizienten der Glieder mit $1/z$ und mit $1/z^2$ für sich $= 0$ gesetzt werden. Dadurch entstehen 2 weitere Bedingungsgleichungen:

$$2\,(q + s) + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} c_n(l)\,d\,l = 0 \quad . \quad (41), \qquad 2\,(q\,x_a - m\,y_a + s\,x_b - o\,y_b) + \frac{N_1}{\pi} = 0 \quad . \quad (42),$$

wobei die Beziehung eingeführt wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c_n(l)\,l\,d\,l = N_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (43).$$

Das ist die Bedingung für tangentiales Abfließen. Die erste dieser Gleichungen enthält nur die Aussage von der Divergenzfreiheit. Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} c_n(l)\,d\,l$ stellt nämlich in der z-Ebene die gesamte Wassermenge dar, die die Schaufel des Laufrades als Quellsystem gedacht erzeugt. Diese Wassermenge muß natürlich 0 sein, weil die Schaufel tatsächlich quellfrei ist. Demnach ist

$$q = -\,s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (44).$$

Um in den jetzt noch verbleibenden zwei Bedingungsgleichungen die Winkelgeschwindigkeit sichtbar zu machen, werde die Normalkomponente, die bei der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ erzeugt wird, mit $c_n'(l)$ bezeichnet, so daß also

$$c_n(l) = \omega \cdot c_n'(l) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (45)$$

zu setzen ist. Außerdem wird für die Winkelgeschwindigkeit und für die Zirkulation um die Schaufeln bei stoßfreiem Eintritt ω_0' bzw. o_0' geschrieben. Dann lauten die zwei Hauptgleichungen endgültig: (mit $N_{1,2} = \omega_0'\,N_{1,2}'$)

$$2\left(q\,x_a - m\,y_a - \frac{q\,x_b + o'_0\,y_b}{r_b^2}\right) + \frac{\omega_0'}{\pi}\,N'_2 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (46),$$

$$2\,(q\,x_a - m\,y_a - q\,x_b - o'_0\,y_b) + \frac{\omega_0'}{\pi}\,N'_1 = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (47),$$

so daß also in beiden Bedingungsgleichungen nur die Verbindungen $q\,x_a - m\,y_a$, $q\,x_b + o\,y_b$ u. r_b auftreten.

6. Berechnung der aufgenommenen Leistung. Das von der Pumpe hydraulisch aufgenommene Drehmoment ist $D = \frac{Q\gamma}{g}\frac{\Sigma\,\Gamma_s}{2\,\pi}$, die erzeugte Förderhöhe ist $H = \frac{\omega}{g}\frac{\Sigma\,\Gamma_s}{2\,\pi}$. Dabei bedeutet ω die Winkelgeschwindigkeit, Q die Wassermenge und Γ_s die Zirkulation um eine Schaufel. Die Strömung im Laufrade ist nun aber in den Feldern zwischen zwei Schaufeln kongruent, deshalb ist $\Sigma\,\Gamma_s = n\,\Gamma_s$, wobei n die Schaufelzahl ist. In der bisher verwandten Bezeichnungsweise ist $2\,\pi\,m$ die Zirkulation auf einer Kurve innerhalb der Laufschaufeln um die Achse des Laufrades, während $2\,\pi\,o$ die Zirkulation des von dem Laufrade abfließenden Wassers ist. Es ist aber zu beachten, daß bei der Reduktion mit $w = \sqrt[n]{w_3}$ die Werte q, m, o mit n multipliziert werden. In der w-Ebene ist also: Wassermenge $Q = 2\,\pi\,n\,q$, innere Zirkulation $\Gamma_i = 2\,\pi\,n\,m$, äußere Zirkulation $\Gamma_a = 2\,\pi\,n\,o$, Zirkulation um die Schaufel $\Gamma_s = 2\,\pi\,(o - m)$. Das Drehmoment des untersuchten Kreiselrades ist also: $D = \frac{2\,\pi\,q\,n^2}{g}\,(o - m)$ und die Förderhöhe $H = \frac{\omega}{g}\,n\,(o - m)$. Die Gleichungen (46) und (47) geben jetzt die Möglichkeit, das Drehmoment und die Förderhöhe für jede Drehzahl und Wassermenge nachzurechnen. Für die folgenden Rechnungen soll nun eine Pumpe ohne Leitapparat beim Eintritt d. h. mit drallfreier Zuströmung des Wassers zu den Schaufeln angenommen d. h. $m = 0$ gesetzt werden. Dann lauten die Gleichungen (46) und (47):

$$q\,(x_a\,r_b^2 - x_b) - o_0'\,y_b + \frac{\omega_0'}{2\,\pi}\cdot r_b^2\,N_2' = 0\,, \qquad q\,(x_a - x_b) - o_0'\,y_b + \frac{\omega_0'}{2\,\pi}\,N_1' = 0.$$

Daraus folgt mit Gl. (15) und (16)

$$\omega_0' = \frac{2\,\pi\,(x_b\,r_b + x_a)}{-N_1' + r_b\,N_2'}\cdot q \quad . \; . \; . \; . \quad (48), \qquad o_0' = q\,\frac{(x_b - x_a)\,(N_1' - r_b\,N_2')}{(-N_1' + r_b^2\,N_2')\,y_a} \quad . \; . \; . \; . \quad (49).$$

7. Vergleich mit „unendlicher Schaufelzahl". Das wichtigste an den bis jetzt erreichten Ergebnissen ist die Möglichkeit, sie mit den nach der Eulerschen Formel errechneten Verhältnissen zu vergleichen. Die Eulersche Formel lautet:

$$D = \frac{Q\gamma}{g}(c_{ua}\, r_a - c_{ui}\, r_i).$$

Die Bedingungen für stoßfreien Eintritt lautet in diesem Fall:

$$u_{i0} = \omega_0 = w_{ui0} = \frac{Q}{F_i}\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad (\text{Abb. } 7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

u = Umfangsgeschwindigkeit, c = Absolutgeschwindigkeit, w = Relativgeschwindigkeit.
Index i (innen) = Eintritt ins Laufrad, Index a (außen) = Austritt aus dem Laufrad,
Index u = Umfangskomponente, Index 0 = stoßfreier Eintritt.

Aus Gl. (50) berechnet sich der Wert ω_0 für stoßfreien Eintritt bei der der Eulerschen Formel zugrunde gelegten Annahme der »Unendlichen Schaufelzahl« zu

$$\omega_0 = \frac{Q\,\mathrm{tg}\,\alpha}{F_i \cdot r_i} = \frac{n\,q}{r_i^2}\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51),$$

mit $F_i = 2\,\pi\, r_i$. Das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten wird

$$\frac{\omega_0'}{\omega_0} = \frac{r_i^2\, 2\,\pi\,(x_b \cdot r_b + x_a)}{n\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(-N_1' + r_b^2\, N_2')} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52).$$

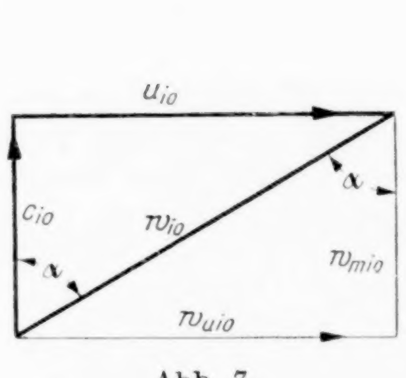


Abb. 7.



Abb. 8.

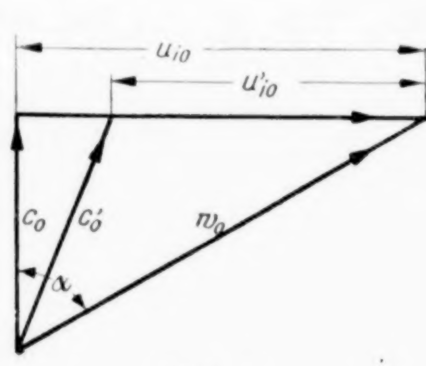


Abb. 9.

Der Wert r_i wird aus der Abbildungsfunktion berechnet, indem man $z = 0$ einsetzt und von dem errechneten Wert w_0 den Absolutwert bildet, $r_i = |w_0|$. Es zeigt sich ohne weiteres durch Vergleich der beiden Gleichungen (48) mit (51), daß $\omega_0' \neq \omega_0$ und zwar muß $\omega_0' < \omega_0$ sein. Das ergibt sich aus folgender Ueberlegung (Abb. 8 und 9): damit eine Leistungsaufnahme zustande kommt, muß um jede Schaufel eine Zirkulation Γ_s bestehen, die die Geschwindigkeiten auf der Vorderseite der Schaufel verkleinert, auf der Rückseite vergrößert. Dadurch wird die an der Quelle in der Achse noch rein radiale Absolutgeschwindigkeit c_0 um einen gewissen Winkel nach rechts gedreht und in c_0' übergeführt. Damit das Wasser relativ zur Schaufel tangential, also mit der Geschwindigkeit w_0 zuströmt, muß sich das Laufrad am Eintritt mit der Umfangsgeschwindigkeit u_0' drehen. Bei Annahme von unendlicher Schaufelzahl ist $\Gamma_s = 0$ und die Absolutgeschwindigkeit ist auch am Schaufeleintritt noch radial gerichtet. In diesem Fall wird das tangentiale Zuströmen durch die Umfangsgeschwindigkeit u_0 bewirkt, und aus dem Diagramm Abb. 9 ergibt sich $u_0 > u_0'$ oder $\omega_0 > \omega_0'$. Da für die Schaufelzahl $n \to \infty$ auch $\Gamma_s \to 0$ geht, muß sein $\lim\limits_{n \to \infty} \omega_0' = \omega_0$ oder

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{\omega_0'}{\omega_0}\right] = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53).$$

Ein Vergleich der nach Euler berechneten Leistungsaufnahme mit der für die Potentialströmung berechneten hat nur dann einen Sinn, wenn in beiden Fällen derselbe durch ω und q bestimmte Betriebszustand angenommen wird. Nun hat sich aber für stoßfreien Eintritt ein verschiedenes ω ergeben. Für die weitere Rechnung kann nur ein Wert, entweder ω_0 oder ω_0' zugrunde gelegt werden. Dazu werde ω_0' gewählt, weil nur dann die beiden Bedingungsgleichungen (46) und (47) erfüllt bleiben, wenn $m = 0$ ist. Es wäre unpraktisch, von einer dieser Grundlagen abzugehen, weil in einem Falle die Grundannahmen für die Rechnung geändert werden müßten, und im anderen Falle die

Rechnung nur für eine Pumpe mit Leitapparat am Eintritt gälte. Für $\omega = \omega_0'$ ergibt die Rechnung nach **Euler** nicht mehr stoßfreien Eintritt. Davon wird aber der Wert für die Leistungsaufnahme nicht berührt, weil für ihn nur der Drall am Austritt in Frage kommt. ($c_{ui}\, r_i = 0$)

$$D_0 = \frac{Q\,\gamma}{g}\, c_{ua}\, r_a\,, \quad r_a = 1\,, \quad c_{ua} = u_a - w_{ua} = \omega_0' - n\, q \operatorname{tg} \alpha\,, \quad D_0' = \frac{Q\,\gamma}{g}\, n\, o_0' \qquad (54)$$

$$\frac{D_0'}{D_0} = \frac{n\, o_0'}{c_{ua}} = \frac{n\,(x_b - x_a)\,(N_1' - r_b\, N_2')}{y_a\,[(x_b\, r_b + x_a)\, 2\,\pi - n \operatorname{tg} \alpha\,(N_1' + r_b^2\, N_2')]} \quad \ldots \qquad (55).$$

8. Veränderliche Schaufelzahl n. Durch die Wahl der Größen α, z_a und z_b in der Abbildungsfunktion bekommt man Laufräder, deren Schaufeln ein bestimmtes Ueberdeckungsverhältnis m haben. m ist von der Schaufelzahl n unabhängig, dagegen ändert sich der Eintrittsradius r_i als Funktion von n und zwar so, daß $\lim\limits_{n \to \infty} r_i = r_a = 1$ wird. Der Grenzfall für die Schaufelanordnung im Laufrad wird also erreicht mit unendlich vielen unendlich kleinen Schaufeln, die dieselbe Anordnung haben, wie die Gitterschaufeln (Abb. 5). Infolgedessen ist auch $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{D_0'}{D_0}\right]$ nicht gleich 1, sondern gleich einem anderen Wert, der im folgenden berechnet werden soll. Nach Gl. (29), (35) und (43) ist

$$n\, N_1' = \frac{k}{\omega} \cos \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} M\,(l)^{1/n} \cdot \frac{l^2\, d\, l}{r\,(l)}\,, \qquad n\, N_2' = \frac{k}{\omega} \cos \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} M\,(l)^{1/n} \cdot \frac{d\, l}{r\,(l)}$$

dabei ist

$$r\,(l) = [(l - x_a)^2 + y_a^2]\,[(l - x_b)^2 + y_b^2] \quad \ldots\ldots \qquad (56)$$

$c_n\,(l, n) = k\, M\,(l)^{1/n} \cdot l/r\,(l)$ ist als Funktion von n physikalisch nur für ganzzahlige positive Werte von n erklärt. Man sieht aber sofort, daß $c_n\,(l, n)$ auch für beliebiges positives n existiert. Wenn nun mit $M_{\min}$ der kleinste und mit $M_{\max}$ der größte Wert bezeichnet wird, den $M\,(l)$ annehmen kann, dann gilt zunächst für jedes beliebige endliche Intervall $l_u < l < l_0$:

$$M_{\min}^{1/n} \int_{l_u}^{l_0} \frac{l^2\, d\, l}{r\,(l)} < \int_{l_u}^{l_0} M\,(l)^{1/n}\, \frac{l^2\, d\, l}{r\,(l)} < M_{\max}^{1/n} \int_{l_u}^{l_0} \frac{l^2\, d\, l}{r\,(l)}$$

oder

$$M_{\min}^{1/n} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l^2\, d\, l}{r\,(l)} - \varepsilon_1\right] < \int_{-\infty}^{+\infty} M\,(l)^{1/n} \cdot \frac{l^2\, d\, l}{r\,(l)} - \varepsilon_2 < M_{\max}^{1/n} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \cdot \frac{l^2\, d\, l}{r\,(l)} - \varepsilon_1\right].$$

Diese Ungleichung wird erfüllt für jedes noch so kleine $\varepsilon_{1,2}$ wenn nur $|l_u|$ und $|l_0|$ hinreichend groß gewählt werden. Im Grenzfalle gilt also

$$M_{\min}^{1/n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l^2\, d\, l}{r\,(l)} \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} M\,(l)^{1/n} \cdot \frac{l^2\, d\, l}{r\,(l)} \leqq M_{\max}^{1/n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l^2\, d\, l}{r\,(l)}.$$

Mit Rücksicht auf Gl. (32) wird demnach

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{n\, N_1'\, \omega}{k \cos \alpha}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l^2\, d\, l}{r\,(l)} = J_1 \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (57)$$

und ebenso

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{n\, N_2'\, \omega}{k \cos \alpha}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\, l}{r\,(l)} = J_2 \quad \ldots\ldots\ldots \qquad (58).$$

Die beiden rechts stehenden Integrale sind zu bilden über einer gebrochenen rationalen Funktion und sind geschlossen darstellbar. Die Lösung wird gewonnen durch eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{l^2}{(l^2 - 2\, x_a\, l + 1)\,(l^2 - 2\, x_b\, l + r_b^2)} = \frac{A\, l + B}{l^2 - 2\, x_a\, l + 1} + \frac{C\, l + D}{l^2 - 2\, x_b\, l + r_b^2}.$$

Zu der Bestimmung der Koeffizienten bestehen 4 Gleichungen:

$$
\begin{array}{rrrrl}
+ A & & + C & & = 0 \\
- 2 x_b A & + B & - 2 x_a C & + D & = 1 \\
+ r_b^2 A & - 2 x_b B & + C & - 2 x_a D & = 0 \\
& + r_b^2 B & & + D & = 0.
\end{array}
$$

Die Nennerdeterminante ist gleich:

$$
N = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2x_b & 1 & -2x_a & 1 \\ r_b^2 & -2x_b & 1 & -2x_a \\ 0 & r_b^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r_b^2 \begin{vmatrix} -2x_a & 1 \\ 1 & -2x_a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2x_a \\ -2x_b & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
- r_b^2 \begin{vmatrix} -2x_b & 1 \\ r_b^2 & -2x_a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2x_b & 1 \\ r_b^2 & -2x_b \end{vmatrix} = (r_b^2 - 1)^2 - 4 x_a x_b (r_b^2 + 1)
$$

$$
A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2x_a & 1 \\ 0 & -2x_b & 1 & -2x_a \\ 0 & r_b^2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{N} = \frac{-2x_b + 2x_a r_b^2}{N}, \qquad B = \frac{1 - r_b^2}{N}
$$

$$
C = -A = \frac{+2x_b - 2x_a r_b^2}{N}, \qquad D = \frac{r_b^4 - r_b^2}{N}.
$$

Nach Bestimmung der Koeffizienten kann das Integral ausgewertet werden. (Hütte, Band I oder Bierens de Haan, Intégrales Définies, table 22, 14)

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(A\,l + B)\,d\,l}{l^2 - 2 x_a l + 1} = \frac{\pi}{y_a}(B + A x_a); \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(C\,l + D)\,d\,l}{l^2 - 2 x_b l + r_b^2} = \frac{\pi}{y_b}(D + C x_b)
$$

$$
J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{l^2\,d\,l}{r(l)} = \pi \left[\frac{1}{y_a}(B + A x_a) + \frac{1}{y_b}(D + C x_b) \right].
$$

Genau in derselben Weise wird das zweite Integral ausgewertet:

$$
\frac{1}{(l^2 - 2 x_a l + 1)(l^2 - 2 x_b l + r_b^2)} = \frac{E\,l + F}{l^2 - 2 x_a l + 1} + \frac{G\,l + H}{l^2 - 2 x_b l + r_b^2}
$$

$$
E = \frac{2 x_b - 2 x_a}{N}, \qquad F = \frac{4 x_a^2 - 1 - 4 x_a x_b + r_b^2}{N}
$$

$$
G = -E = \frac{2 x_a - 2 x_b}{N}, \qquad H = \frac{1 - 4 x_a x_b + 4 x_b^2 - r_b^2}{N}
$$

$$
J_2 = \pi \left[\frac{1}{y_a}(F + E x_a) + \frac{1}{y_b}(H + G x_b) \right]
$$

$$
\frac{J_1}{J_2} = \frac{(1 - r_b^2 - 2 x_a x_b + 2 x_a^2 r_b^2)\,y_b + (r_b^4 - r_b^2 + 2 x_b^2 - 2 x_a x_b r_b^2)\,y_a}{(2 x_a^2 - 1 + r_b^2 - 2 x_a x_b)\,y_b + (1 - r_b^2 - 2 x_a x_b + 2 x_b^2)\,y_a}.
$$

Der Bruch wird umgeformt, indem eingesetzt wird, $y_b = r_b \cdot y_a$ und in der rechten oberen Klammer $x_b^2 = x_a^2 r_b^2$. Dann heben sich sämtliche Glieder links unten gegen rechts oben und rechts oben gegen links unten, und man erhält

$$
I_1 : I_2 = r_b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (59).
$$

Nun ist:

$$
\left[\frac{n\,o_0'}{c_{u\,a}}\right]_{n \to \infty} = \frac{(x_b - x_a)(J_1 - r_b J_2)}{y_a\,[2\pi(x_b r_b + x_a) - n\,\mathrm{tg}\,\alpha\,(-J_1 + r_b^2 J_2)]} = \frac{0}{0} \quad \ldots \quad (60).
$$

Der Zähler wird 0 wegen der Gl. (59) und der Nenner wegen Gl. (52), (53)

$$
\frac{n\,o_0'}{c_{u\,a}} = \frac{k_1 \left(\int M(l)^{1/n} \frac{l^2\,d\,l}{r(l)} - r_b \int M(l)^{1/n} \frac{d\,l}{r(l)} \right)}{k_2 - k_3 \left(- \int M(l)^{1/n} \frac{l^2\,d\,l}{r(l)} + r_b^2 \int M(l)^{1/n} \frac{d\,l}{r(l)} \right)} = \frac{Z(n)}{N(n)}.
$$

Die unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen $M(l)^{1/n} \frac{l^2}{r(l)}$ und $M(l)^{1/n} \frac{1}{r(l)}$ erfüllen folgende Bedingungen: Die Funktionen selbst sowie ihre Ableitungen nach n sind stetig für beliebiges l und positives n und besitzen ein endlich großes uneigentliches Inte-

gral von $l = -\infty$ bis $l = +\infty$. Man kann also die Integrale J_1 und J_2 unter dem Integralzeichen differenzieren und erhält dann:

$$\frac{Z'(n)}{N'(n)} = \frac{-k_1 \cdot \frac{1}{n^2}\left(\int M(l)^{\frac{1}{n}}\, l n\, M(l) \frac{l^2\, d l}{r(l)} - r_b \int M(l)^{\frac{1}{n}}\, l n\, M(l) \frac{d l}{r(l)}\right)}{+ k_3 \cdot \frac{1}{n^2}\left(-\int M(l)^{\frac{1}{n}}\, l n\, M(l) \frac{l^2\, d l}{r(l)} + r_b^2 \int M(l)^{\frac{1}{n}}\, l n\, M(l) \frac{d l}{r(l)}\right)}.$$

Auf Grund derselben Ueberlegungen, die zu Gl. (57) und (58) führen, wird

$$\lim_{n \to \infty}\left[\frac{n\, o_0'}{c_{u\, a}}\right] = -\frac{k_1\left(\int l n\, M(l) \frac{l^2\, d l}{r(l)} - r_b \int l n\, M(l) \frac{d l}{r(l)}\right)}{k_3\left(-\int l n\, M(l) \frac{l^2\, d l}{r(l)} + r_b^2 \int l n\, M(l) \frac{d l}{r(l)}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (61).$$

Diese Integrale können zahlenmäßig ausgewertet und der Grenzwert direkt berechnet werden. Die Konstanten k_1 und k_3 sind durch Gl. (55) bestimmt.

9. Durchrechnung eines Zahlenbeispiels. Zur praktischen Anwendung des Verfahrens werde ein Laufrad gewählt, das den in der Praxis verwandten Rädern möglichst ähnlich ist (s. Abb. 13). Die Größen, die die Form des Rades bestimmen, sind folgende: Schaufelzahl $n = 6$, Schaufelwinkel (gegen den Radius gemessen) $\alpha = 60^0$, Ueberdeckungsverhältnis $m = 1{,}31$. Die drei Größen liefern ein Radienverhältnis $r_i : r_a = 0{,}455$. Wenn man nun bei konstantem α und m die Schaufelzahl n verändert, dann erhält man Laufräder wie sie in den Abb. 10 bis 15 dargestellt sind. Von diesen Rädern sind natürlich

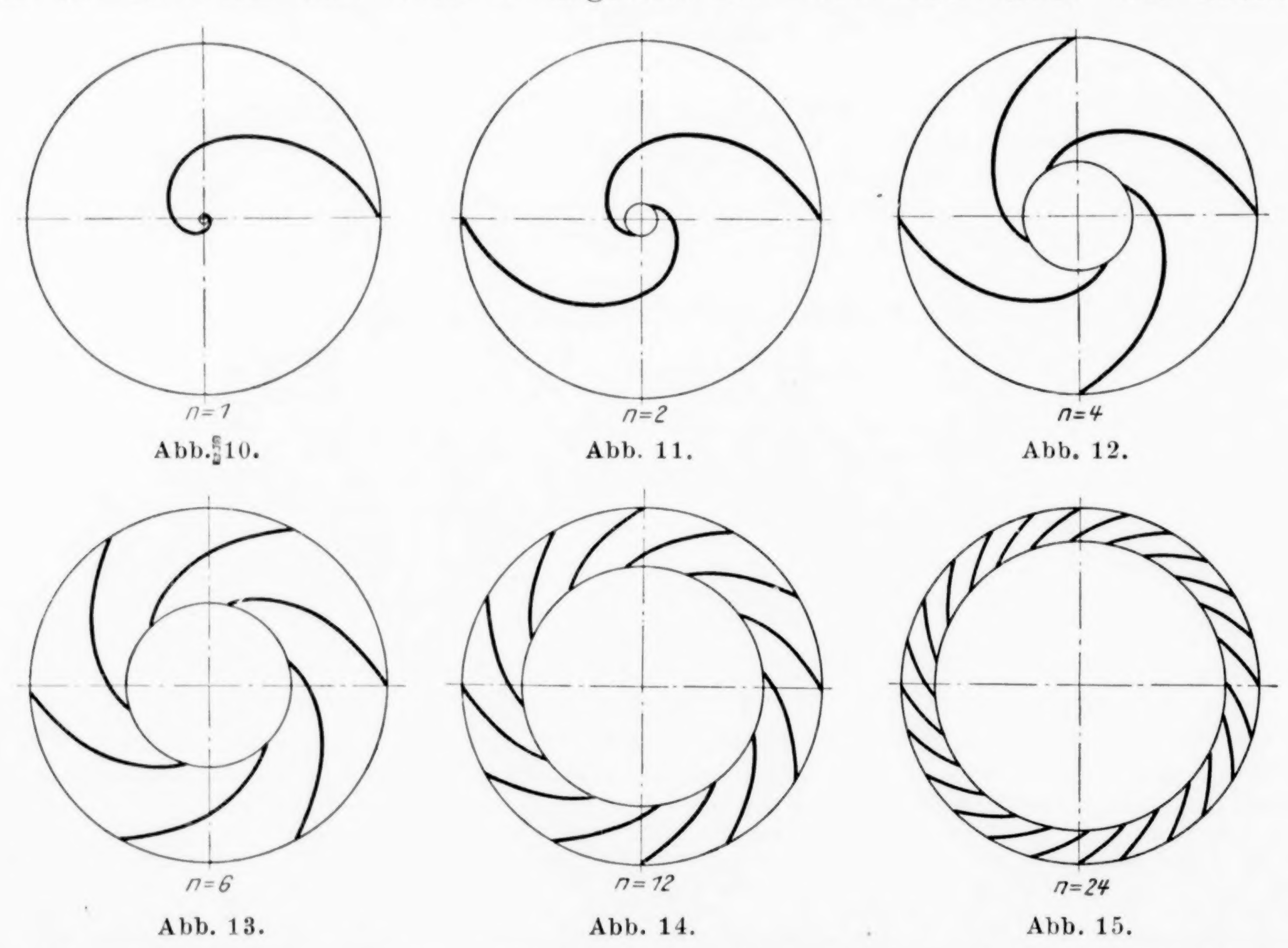


Abb. 10. Abb. 11. Abb. 12.

Abb. 13. Abb. 14. Abb. 15.

nur die mit $n = 4$ bis etwa $n = 12$ in der Praxis brauchbar. Die anderen haben zu extreme Radienverhältnisse. Die beiden Größen α und m bestimmen die jetzt noch freien Konstanten z_a und z_b der Abbildungsfunktion Gl. (18). Will man bei konstantem Radienverhältnis die Schaufelzahl verändern, dann muß man auch m ändern und damit auch z_a und z_b, d. h. man erhält eine andere Abbildungsfunktion. Da nur eine Abbildungsfunktion als Beispiel durchgerechnet werden soll, können nur die in den Abbildungen zum Teil gezeichneten Räder untersucht werden.

Gegeben $m = 1{,}31 : \alpha = 60^0$. Gl. (17):

$$\frac{l}{h} = \frac{2\, m}{\sin 2\, \alpha} = 3{,}03.$$

Damit sind die Proportionen des Gitters bestimmt. Gl. (12) ist transzedent und kann nicht nach ϑ_b aufgelöst werden. Durch Probieren findet man $\vartheta_b = 30^0\ 8^0$.

Gl. (14) liefert dann direkt $r_b = |z_b| = 372{,}6$, wenn $r_a = |z_a| = 1$ gesetzt wird. Es ist auffällig, daß der Punkt $z_b = r_b \cdot e^{i\vartheta b}$ soweit vom 0-Punkt entfernt liegt. Das hängt mit der Wahl von m zusammen. Je größer das Ueberdeckungsverhältnis gewählt wird, desto weiter rückt der Punkt z_b hinaus und desto spitzer wird das Dreieck $(0,\ z_a,\ z_b)$

$$z_a = 1 \cdot e^{i(\pi - \vartheta b)} = x_a + i\, y_a\,; \qquad z_b = 372{,}6 \cdot e^{i\vartheta b} = x_b + i\, y_b$$

$$x_a = -0{,}865\,, \quad y_a = 0{,}502\,; \qquad x_b = 322{,}3\,, \quad y_b = 187{,}1.$$

Nun können die einzelnen Faktoren der Normalgeschwindigkeit $c_n(l)$ ausgerechnet werden. Gl. (24), (25), (29). Damit sind auch die Funktionen $c_n'(l) \cdot l$ und $c_n'(l) \cdot 1/l$ bekannt und können gezeichnet werden. Die Integrale über derartig komplizierte Funktionen lassen sich natürlich nicht geschlossen darstellen, auch die bestimmten Integrale von $-\infty$ bis $+\infty$ lassen sich nicht exakt bestimmen. Es bleibt praktisch nur die Möglichkeit, die Integrale N_1' und N_2', die in den beiden Bedingungsgleichungen (46) und (47) vorkommen, durch Planimetrieren auszuwerten. Der Schwierigkeit, daß beide Integrale uneigentliche sind, begegnet man durch eine Näherungsrechnung. Unter Benutzung von Gl. (31) kann man schreiben:

$$c_n'(l) = \frac{1}{n} \cdot \frac{l}{r(l)} [1 \pm \varepsilon'(l)], \text{ wenn } l \geqq l_0' \text{ und } l_0' = f(\varepsilon') \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

Man kann in der obigen Gleichung den absoluten Betrag der Zahl $\varepsilon'(l)$ unter jede positive Zahl ε herabdrücken, wenn man nur l_0' genügend groß wählt. Ebenso kann man schreiben:

$$c_n'(l) = \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{l^3} [1 + \varepsilon(l)] \text{ und es wird } \varepsilon(l) < \varepsilon, \text{ wenn } l \geqq l_0 \text{ und } l_0 = f(\varepsilon) \quad (63).$$

Entsprechende Gleichungen gelten mit denselben ε und l_0 für die Funktionen $c_n'(l)\, l$ und $\frac{c_n'(l)}{l}$. Dann gilt auch

$$\int_{l_0}^{+\infty} c_n'(l)\, l\, dl = \frac{k}{n} \int_{-l_0}^{+\infty} \frac{dl}{l^2} \cdot [1 + \varepsilon(l)] = \frac{k}{n} \frac{1}{l_0} (1 + \sigma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64),$$

wobei σ einen Mittelwert der Funktion $\varepsilon(l)$ darstellt, woraus folgt, daß $|\sigma| < \varepsilon$,

$$\int_{l_0}^{+\infty} \frac{c_n'(l)}{l}\, dl = \frac{k}{n} \int_{l_0}^{+\infty} \frac{dl}{l^4} [1 + \varepsilon(l)] = \frac{k}{3 \cdot n} \cdot \frac{1}{l_0^3} (1 + \tau) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65),$$

wobei $\tau < \varepsilon$.

Man kann also die Restintegrale von l_0 bis ∞ und von $-l_0$ bis $-\infty$ mit beliebiger Genauigkeit ersetzen durch die obigen geschlossenen Ausdrücke. Die Funktionen $c_n'(l) \cdot l$ und $\frac{c_n'(l)}{l}$ sind für $-1000 \leqq l \leqq +1000$ nach der exakten Gl. (22), dann in dem Intervall $1000 < l < l_0$ mit Gl. (62) gerechnet worden. Der Wert l_0 wurde bei den verschiedenen Rechnungen verschieden gewählt. Dabei ist ε' vernachlässigt. Die Restintegrale sind durch Gl. (64) und (65) ersetzt, wobei wiederum σ und τ vernachlässigt wurden. ε, σ, τ lassen sich verhältnismäßig leicht so abschätzen, daß die Integrale mit weniger als 1 vH Ungenauigkeit ausgewertet werden können. Die zahlenmäßigen Ergebnisse sind in der folgenden Zahlentafel zusammengefaßt, außerdem sind die Funktionen $\frac{\omega_0'}{\omega_0} = f_1(n)$ und $\frac{n\, o_0}{c_{u\,a}} = f_2(n)$ in den Abb. 16 und 17 dargestellt.

n	N_1'	N_2'	r_i	$\frac{\omega_0'}{\omega_0}$	$\frac{D_0'}{D_0} = \frac{n\, o_0'}{c_{u\,a}}$
1	445	0,01445	0,00851	0,020	+ 0,377
2	310	0,0569	0,0923	0,234	+ 0,514
3	242	0,1025	0,2042	0,433	+ 0,579
6	150,7	0,152	0,4545	0,715	+ 0,679
12	83,8	0,1447	0,672	0,816	+ 0,685
24	44,9	0,0957	0,8198	0,92	+ 0,704

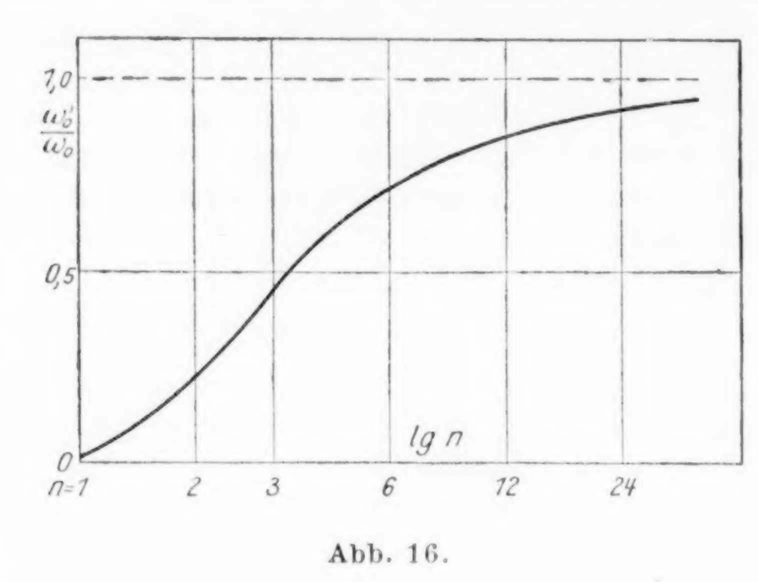


Abb. 16.

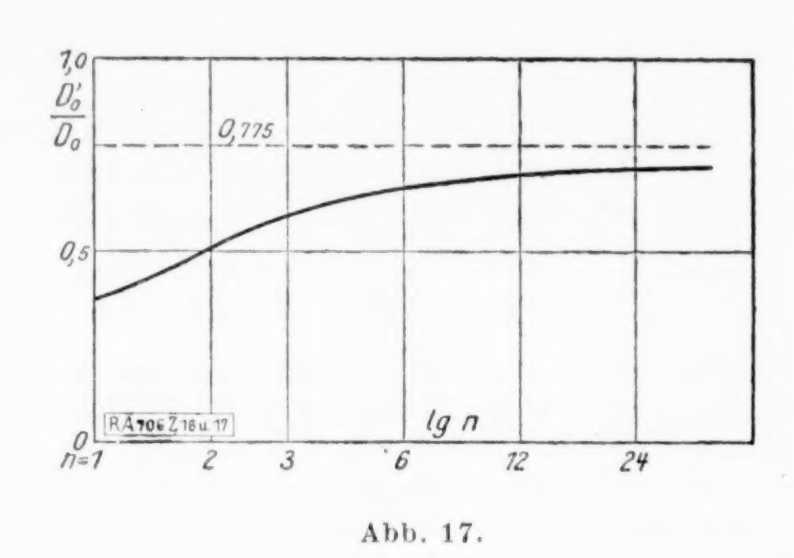


Abb. 17.

Die Werte ω_0' lassen sich für beliebige Schaufelzahlen mit der durch das Planimetrieren bedingten Genauigkeit berechnen. Die Berechnung von o_0' wird aber bei höherer Schaufelzahl ungenau, weil o_0' als Differenz berechnet wird, und für $n \to \infty$ selbst gegen 0 geht. So ist z. B. für $n = 24$ $o_0' = -1{,}723 + 2{,}17 \simeq + 0{,}45$. Die Zahl 2,17 ist erhalten durch das Planimetrieren und enthält die dabei unvermeidliche Ungenauigkeit. Der beim Planimetrieren gemachte Fehler wird, wie die Zahlen zeigen, annähernd verfünffacht. Diese Tatsache ist in erster Linie eine Folge des extremen Radienverhältnisses $\frac{r_i}{r_a} = 0{,}82$. (Auch der Wert $c_{ua} = u_a - w_{ua}$ wird als Differenz bestimmt.) Bei praktisch ausgeführten Pumpen kommen derartige Radienverhältnisse nicht vor; dort läßt sich immer verhältnismäßig leicht eine Genauigkeit von 2 % einhalten. Der Grenzwert für $\frac{n\, o'_0}{c_{ua}}$ für unendlich werdendes n wird aus Gl. (60) berechnet zu:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{n\, o'_0}{c_{ua}}\right] = 0{,}775,$$

indem die dazu notwendigen Integrale ebenfalls planimetriert werden. Die Abb. 17 zeigt das im Pumpenbau schon lange bekannte Ergebnis, daß die Leistungsaufnahme einer Pumpe immer kleiner ist als der nach Euler berechnete Wert. Wie weit die hier theoretisch berechneten Werte mit den empirisch gefundenen übereinstimmen, kann nur der Versuch entscheiden. Unter den Annahmen, die hier gemacht worden sind, besitzt die Annahme der reibungsfreien Flüssigkeit die größte Tragweite. Dadurch wird man nämlich gezwungen, eine Zirkulation immer als von vornherein gegeben anzunehmen, weil Wirbel und Zirkulation in einer reibungsfreien Flüssigkeit unter keinen Umständen entstehen können. Praktisch entstehen ja immer Wirbel, die sich besonders von den Schaufelenden ablösen und mit der Flüssigkeit fortschwimmen. Dennoch haben viele Versuche gezeigt, daß tatsächlich die Strömungen in Kreiselmaschinen beim Normalbetriebszustand der Potentialströmung sehr nahe kommen. (Vergl. z. B. Dissertation Oertli Zürich, außerdem die älteren Arbeiten von Schuster und Ellon in den Forschungsheften des V. D. J. Nr. 82 und 102). Der Normalbetriebszustand ist für jede Pumpe charakterisiert durch ein bestimmtes Verhältnis von Wassermenge und Drehzahl. Aendert man dieses Verhältnis stark, d. h. geht man zu sehr extremen Betriebszuständen über, dann erhält man Strömungen, die nicht mehr übereinstimmen mit den durch die Rechnung erhaltenen. Praktisch können z. B. weder beim Eintritt ins Laufrad noch beim Austritt unendliche Geschwindigkeiten auftreten, auch wenn nicht mehr stoßfreier Eintritt und tangentiales Abströmen vorliegt. Außerdem sagt die Rechnung nichts darüber aus, wielange das tangentiale Abströmen erhalten bleibt. Anhaltspunkte darüber lassen sich nur durch physikalische Untersuchungen finden (Analogie mit den Verhältnissen bei Tragflächen von Flugzeugen!). Die Uebereinstimmung der durch die Rechnung gefundenen Strömung mit der tatsächlichen hat also ihre Grenzen. Die Bestimmung dieser Grenzen ist aber solange nicht wesentlich, als man sich auf die Untersuchung des Normalbetriebszustandes beschränkt. Gerade diese Untersuchung ist aber für den Fachmann zunächst das Wichtigste, und dadurch erlangen die vorliegenden Rechnungen eine gewisse Bedeutung. 706

Die Quer-Geschwindigkeitskurve bei turbulenter Strömung.

Von **H. KREY** in Berlin.

Die Verteilung der mittleren Geschwindigkeiten der strömenden Flüssigkeit über den Durchmesser eines Rohres oder über die Tiefe eines breiten, offenen Gerinnes ist ein bestimmendes Kennzeichen der Fließart und für viele beobachtete Erscheinungen maßgebend. Es ist daher schon immer versucht worden, diese Verteilung durch Messung möglichst genau festzustellen und durch Ueberlegung zu ergründen.

Eigentümlich ist es, daß sich gerade die neueren Vorschläge für die Annahme einer gesetzmäßigen Geschwindigkeitsverteilung wissenschaftlich und praktisch mehr von der Wirklichkeit entfernen als die älteren.

Einer der neuesten Vorschläge rührt von Hrn. H. Lorenz, Danzig[1]), her. Er nimmt eine Verteilung der Geschwindigkeiten nach der Form eines Trapezes an, dessen schräge Seiten er etwas nach außen ausbiegt. Er glaubt diese seitlichen Schrägen durch eine wirbelnde »Prandtlsche Grenzschicht« begründen zu können. Nun kann man aber in einem Rohr, abgesehen vom Einlauf, nicht von einer Prandtlschen Grenzschicht reden, weil sich eine solche nach einer entsprechenden Einlauflänge über den ganzen Rohrquerschnitt erstreckt.

Selbstverständlich kann man mit jeder beliebigen, von der Wirklichkeit abweichenden Verteilungslinie arbeiten, wenn man die Ergebnisse an anderweitig als richtig erkannten Größen abstimmt und die Abweichungen dann auf die Beiwerte verbucht[2]).

Praktisch scheinbar mehr mit der Wirklichkeit übereinstimmend, aber auch nicht völlig einwandfrei, ist die 1921 auf Anregung Prandtls von v. Kármán vorgeschlagene Verteilungslinie[3])

$$v = v_{\max}\left(1 - \frac{\varrho}{R}\right)^{1/7} \qquad (1),$$

worin R den Rohrhalbmesser und ϱ den Abstand der betreffenden Geschwindigkeit v von der Rohrmitte bedeuten. Die von v. Kármán gleich selbst gemachte Feststellung, daß die ermittelte Linie an beiden Grenzen sowohl für $\varrho = R$ als auch für $\varrho = 0$ nicht den an sie zu stellenden Anforderungen entspricht, hätte ihm sagen müssen, daß ein Fehler in der Beweisführung oder in den Annahmen liegen muß. Durch das künstliche Hilfsmittel der willkürlichen Einsetzung einer neuen Potenz n

$$v = v_{\max}\left(1 - \left(\frac{\varrho}{R}\right)^n\right)^{1/7}$$

kann er allerdings in der Rohrmitte

$$\frac{dv}{d\varrho} = 0 \qquad (2)$$

machen, beseitigt aber den Fehler an der Rohrwand nicht, wo $\frac{dv}{d\varrho}$ nach der Gleichung ∞ sein würde. Der Behauptung, daß die Gleichung für unendliche Reynoldssche Zahlen als asymptotischer Ausdruck gelte, steht entgegen, daß die Begründung des Gesetzes doch mit endlichen Werten gemacht ist, und wir es in der Praxis nur mit endlichen Abmessungen und Geschwindigkeiten zu tun haben. Es wird uns überhaupt kaum möglich sein, uns einen Dauerzustand mit unendlichen Reynoldsschen Zahlen vorzustellen.

Auch die vielfach behauptete gute Uebereinstimmung des Gesetzes der 7. Wurzel mit den Messungen erscheint in einem etwas andern Lichte, wenn man sich klar macht, daß jede höhere Wurzel diese Bedingung zu erfüllen scheint. So z. B. stimmt eine Verteilung nach der 10. und 20. Wurzel ebensogut, zum Teil sogar noch besser mit den naturgemäß sehr schwankenden Messungen überein und die schon 1883 von Lavale[4]) vorgeschlagene 12. Wurzel ebenso wie die 1903 von Christen[4]) vorgeschlagene 8. Wurzel würden die gleiche Berechtigung haben.

[1]) Das Turbulenzproblem für das gerade Kreisrohr. Physikalische Zeitschrift 1925, S. 557. H. Lorenz.

[2]) Die genannte Lorenzsche Arbeit hat in der Zeitschrift des VdI 1926 S. 173 eine günstige Beurteilung gefunden, der ich mich durchaus nicht anschließen kann.

[3]) Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Heft 4, Band I (1921) S. 237 bis 240.

[4]) vergl. Forchheimer, Hydraulik 1914, S. 100 bis 101.

Sie haben aber auch alle denselben Nachteil, daß sie gerade dort nachweislich nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmen, wo es uns am meisten darauf ankommt, nämlich in unmittelbarer Nähe der Wandungen.

Diese Unstimmigkeiten vermeidet z. T. ein ebenfalls schon recht alter Vorschlag, die logarithmische Linie als Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten anzusehen. Der Vorschlag ist schon vor über hundert Jahren von Funk[1]) gemacht und dann später von Jasmund wieder aufgenommen. Jasmund[2]) und nachher Bölte[2]) wiesen nach, daß von allen untersuchten Verteilungskurven die logarithmische Linie immer am besten die Geschwindigkeitsverteilung über die Senkrechten in Flüssen wiedergibt.
In etwas anderer Form würde die Verteilungsformel für das Kreisrohr lauten:

$$v = \zeta\, v_{\max} \cdot \log\left(1 + \frac{R - \varrho}{a}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Hierin haben R und ϱ dieselbe Bedeutung wie oben, ζ ist eine Zahl, die sich aus dem Geschwindigkeitswert $v_{\max}$ in der Mitte ergibt, und a ist der (sehr kleine) Abstand der Rohrwandung ($\varrho = R$) vom Anfangspunkt der logarithmischen Linie ($\varrho = R + a$), der sich aus der Randbedingung errechnen läßt.

Es ist nämlich für $\varrho = 0$ in der Mitte $v = v_{\max}$, daher muß

$$\zeta \log\left(1 + \frac{R}{a}\right) = 1$$

sein oder

$$\zeta = \frac{1}{\log\left(1 + \frac{R}{a}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Gl. (3) lautet also nach Einsetzung von ζ

$$v = v_{\max} \frac{\log\left(1 + \frac{R - \varrho}{a}\right)}{\log\left(1 + \frac{R}{a}\right)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5).$$

Weiter ist $\frac{dv}{d\varrho} = -\zeta \cdot v_{\max} \frac{1}{a + R - \varrho} \log e$ an der Wandung für $\varrho = R$ gleich der durch die Wandbedingung gegebenen Neigung der Querverteilungslinie.

Es ist also für glatte Wand

$$\zeta\, v_{\max} \frac{1}{a} \log e = \frac{1}{\mu_1} \frac{\gamma R J}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6).$$

Hierin ist e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, γ das Einheitsgewicht der Flüssigkeit, μ_1 der Reibungswert und J das Druckgefälle. Die Randbedingung für ausgesprochen rauhe Wände wird weiter unten behandelt.

Aus Gl. (6) und (4) ergibt sich

$$a = \frac{1}{\log\left(1 + \frac{R}{a}\right)} v_{\max} \frac{\log e \cdot 2\mu_1}{\gamma R J} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7).$$

Setzt man hierin $\log e = 0{,}4343$ und für Wasser von $13{,}2^0$ C mittlerer Temperatur

$$\frac{\mu}{\gamma} = 1{,}2 \cdot 10^{-7} \text{ m/sek (für } \gamma = 1),$$

dann ist

$$a = \frac{1{,}04\, v_{\max}}{10^7 \cdot R \cdot J} \frac{1}{\log\left(1 + \frac{R}{a}\right)} \text{ in m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8).$$

a ist bei glatter Wandung sehr klein.

---

[1]) vergl. Forchheimer, Hydraulik 1914, S. 97.

[2]) Jasmund: »Die Einwirkung der Flußsohle auf die Geschwindigkeit des fließenden Wassers«. Zeitschrift für Bauwesen (1893) S. 121 sowie Bölte. »Die Geschwindigkeitsänderung in den Lotrechten natürlicher Flüsse«. Zeitschrift für Bauwesen (1916) S. 361 u. ff.

Für breite Flüsse mit gleichmäßiger Tiefe H würde in der gleichen Weise die Gleichung der Vertikal-Geschwindigkeitskurve lauten

$$v = v_{\max} \frac{\log\left(1 + \frac{z}{a}\right)}{\log\left(1 + \frac{H}{a}\right)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (9),$$

wenn z die Höhe über der Sohle ist.

Auch hier ist

$$a = \frac{v_{\max}}{\log\left(1 + \frac{H}{a}\right)} \cdot \frac{\mu_1 \log e}{\gamma \cdot H \cdot J} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10)$$

bei einigermaßen glatter Sohle sehr klein. Nur bei stärkerer Rauhigkeit nimmt der Abstand a etwas größere Werte an.

Die logarithmische Linie bietet außer einer guten Uebereinstimmung mit den Messungsergebnissen noch den Vorteil, daß sie auch die Randbedingungen an der Wand (dort wo wir z. T. nicht messen können) erfüllt. Außerdem läßt sie sich in gewissem Grade mit verhältnismäßig geringen Annahmen wissenschaftlich begründen, wie an der Vertikalgeschwindigkeitskurve eines breiten Gerinnes von gleichmäßiger Tiefe gezeigt werden soll.

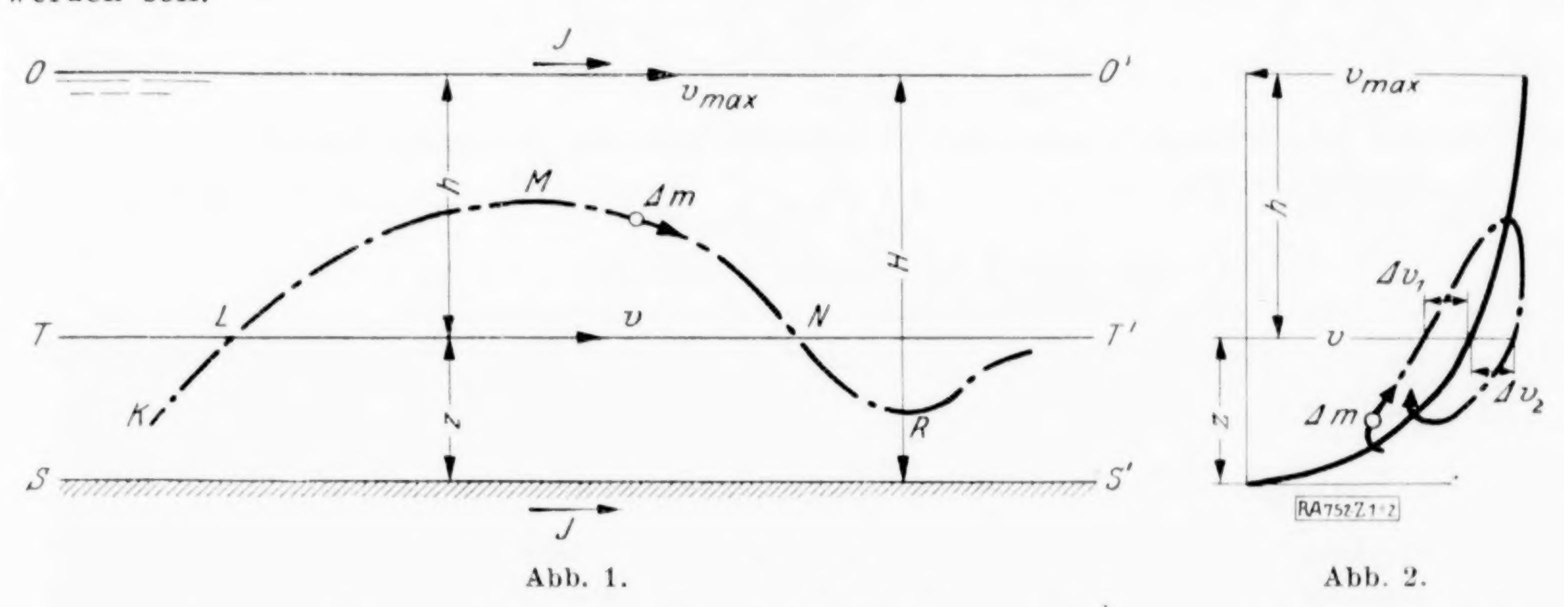


Abb. 1. Abb. 2.

In Abb. 1 sei der Längsschnitt eines solchen Gerinnes mit der gleichmäßigen Wassertiefe H dargestellt, dessen Wasserspiegel OO' und Sohle SS' in dem Gefälle J liegen

In Abb. 2 sei die Vertikal-Geschwindigkeitskurve gegeben.

Solange wir (laminare) Band-Strömung haben, muß der Differentialquotient in der Höhe z

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\gamma \cdot h \cdot J}{\mu_1}$$

sein, wenn μ_1 der Reibungsbeiwert der laminaren Strömung ist. Bei (turbulenter) Flecht-Strömung tritt zur Reibung noch ein anderer Widerstand hinzu dadurch, daß sich die einzelnen Schichten mischen, d. h. daß sich Wasserteilchen in der z-Richtung nach beiden Richtungen bewegen und nun durch ihre Beschleunigung oder Verzögerung Kräfte auf die durchlaufenen Schichten ausüben. Die Bewegung w in der anderen Querrichtung y nach der Breite scheidet vorläufig infolge der Voraussetzung großer Breite von gleicher Tiefe aus der Betrachtung aus.

In Abb. 1 sei durch die strichpunktierte Linie $KLMNR$ der absolute Weg eines solchen Wasserteilchens mit der Masse Δm angegeben, welches sich in der Strömung irgendwie auf und ab bewegt. Es schneide die Ebene TT' (in der Höhe z) bei der Aufwärtsbewegung im Punkte L und nach einer Zeit von t Sekunden bei der Abwärtsbewegung wieder in N.

Bei der Aufwärtsbewegung gelangt das Wasserteilchen in Schichten von größerer mittlerer Geschwindigkeit v, hinter denen es dauernd zurückbleibt, während es bei der Abwärtsbewegung die mittlere Geschwindigkeit v in den verschiedenen Schichten dauernd überholt. In der Abb. 2 ist die Eigengeschwindigkeit des Wasserteilchens bei einer Auf-

und Abwärtsbewegung in den verschiedenen Höhenlinien durch die strichpunktierte Linie angegeben. In der Fläche TT' (in der Höhe z über der Sohle) mögen die Geschwindigkeitsunterschiede des Wasserteilchens Δm gegenüber der dort sonst herrschenden mittleren Geschwindigkeit v bei der Aufwärtsbewegung $= \Delta v_1$ und bei der Abwärtsbewegung Δv_2 betragen. Dann hat das Wasserteilchen in der Zeit t eine mittlere verzögernde Kraft $= \Delta m \frac{\Delta v_1 + \Delta v_2}{t}$ auf die oberhalb der TT' befindliche Wassermasse ausgeübt.

Fassen wir nun alle durch die Ebene TT' aufwärts und abwärts bewegten Wasserteilchen zusammen, so ergibt sich die gesamte in der Ebene TT' infolge der Querbewegungen ausgeübte Kraft

$$W_2 = \Sigma \frac{(\Delta m \cdot \Delta v)}{\Delta t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11),$$

wenn Δv allgemein den entsprechenden Geschwindigkeitsunterschied der aufwärts und abwärts bewegten Wasserteilchen gegenüber der mittleren Geschwindigkeit v in der Ebene TT' bedeutet und $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ den Massenaustausch durch die Fläche in der Zeiteinheit.

Den Gesamtwiderstand in der Ebene TT' auf die Flächeneinheit

$$W = W_1 + W_2 = \mu_1 \frac{dv}{dz} + \Sigma \frac{(\Delta m \cdot \Delta v)}{\Delta t}$$

setzen wir nun $= (\mu_1 + \mu_2) \frac{dv}{dz}$.

Das ist zulässig, solange wir μ_2 nicht anderweitig festgelegt haben.

Für die Größe von

$$\mu_2 = \frac{\Sigma (\Delta m \cdot \Delta v)}{dv/dz \cdot \Delta t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

haben wir nun einige Anhaltspunkte:

An der (glatten) Sohle muß die Aufwärts- und Abwärtsbewegung der Wasserteilchen in der z-Richtung und damit der Ausdruck $\Sigma \frac{(\Delta m \cdot \Delta v)}{\Delta t} = 0$ sein; ebenfalls ist der Ausdruck an der ebenen Oberfläche null. Zwischen beiden Grenzen wird $\Sigma \frac{(\Delta m \cdot \Delta v)}{\Delta t}$ irgendwo seinen Höchstwert haben; und zwar wird dieser Höchstwert der Sohle erheblich näher liegen als dem Wasserspiegel, weil gerade die großen Geschwindigkeitsunterschiede in der Sohlennähe die Aufwärts- und Abwärtsbewegung der Wasserteilchen verursachen. Durch den Nenner dv/dz in Gl. (12) wird der Höchstwert von μ_2 dagegen weiter nach oben verschoben.

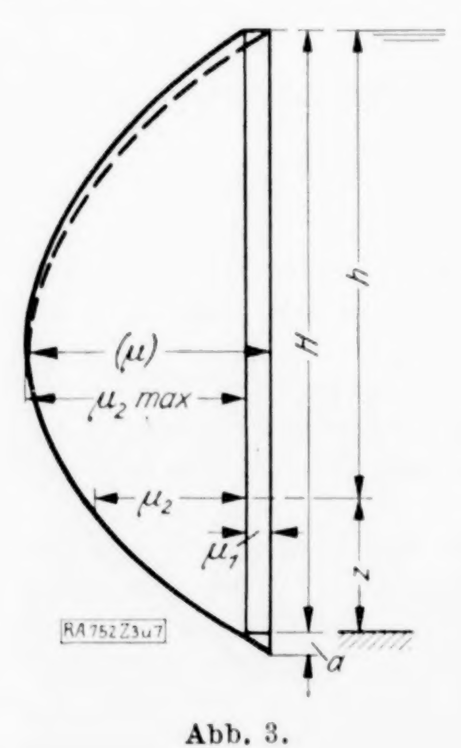


Abb. 3.

Wir nehmen jetzt für μ_2 näherungsweise einen parabolischen[1]) Verlauf an nach der Gleichung

$$\mu_2 = 4\,(\mu_{2\,\max}) \frac{z \cdot h}{H^2} \quad \ldots \quad (13)$$

und haben dann als Gleichung der Quer-Geschwindigkeitskurve bei einem Gefäll J

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\gamma \cdot h \cdot J}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{\gamma \cdot h \cdot J}{\mu_1 + 4\,(\mu_{2\,\max}) \frac{z \cdot h}{H^2}} \quad \ldots (14).$$

Hierin hat der sehr kleine Wert für μ_1 nur in der Nähe der Sohle erheblichen Einfluß, und es ist daher für die erste angenäherte Lösung der Gl. (14) zulässig, die in Abb. 3 dargestellte Verteilung der μ_1- und μ_2-Werte über die Senkrechte durch die punktierte Linie zu ersetzen nach der Gleichung

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = 4\,[\mu] \frac{(z + a) \cdot h}{(H + a)^2} \quad \ldots (15),$$

[1]) Diese Annahme ist lediglich dadurch gerechtfertigt, daß sie wegen der Grenzbedingungen auf keinen Widerspruch stößt und in ihren Ergebnissen mit der Wirklichkeit gut übereinstimmt.

daraus ergibt sich nach Gl. (14)

$$\frac{dv}{dz} = \frac{\gamma \cdot h \cdot J}{\mu} = \frac{\gamma \cdot (H+a)^2 J}{4\,[\mu]\,(z+a)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16)$$

und integriert

$$v = \frac{\gamma \cdot (H+a)^2 J}{4\,[\mu]} \ln(z+a) - c \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17).$$

Setzt man hierin die Grenzbedingungen ein (für $z = 0$ ist $v = 0$ und für $z = H$ ist $v = v_0$), dann lautet die Gleichung

$$v = v_0 \frac{\ln \frac{z+a}{a}}{\ln \frac{H+a}{a}} = v_0 \frac{\ln\left(1+\frac{z}{a}\right)}{\ln\left(1+\frac{H}{a}\right)}$$

wie Gl. (9). Hierin können wir auch den sehr kleinen Wert a aus der Bedingung bestimmen, daß für $z = 0$ an der Sohle

$$\frac{dv}{dz} = \frac{v_0}{\ln\left(1+\frac{H}{a}\right)} \frac{1}{a} = \frac{\gamma \cdot H \cdot J}{\mu_1}$$

oder

$$a = \frac{\mu_1 v_0}{\gamma \cdot H \cdot J \cdot \ln\left(1+\frac{H}{a}\right)}$$

wie in Gl. (10) sein muß. a ist eine sehr kleine Strecke. Beispielsweise ist für eine mittlere Wasserwärme von rd. 13½ °C $\frac{\mu_1}{\gamma}$ = rd. 1,2 10^{-7} m/sek, dafür ergibt sich

$$a = \frac{1{,}2\, v_0}{10^{-7} \cdot H \cdot J \cdot \ln\left(1+\frac{H}{a}\right)} \quad \text{(alles in m und sek).}$$

Die sehr gute Uebereinstimmung der Gl. (5) für das Kreisrohr und (9) für breite Gerinne mit der Wirklichkeit erkennt man sofort, wenn man die gemessenen Geschwindigkeiten auf einseitig logarithmisch geteiltes Papier aufträgt.

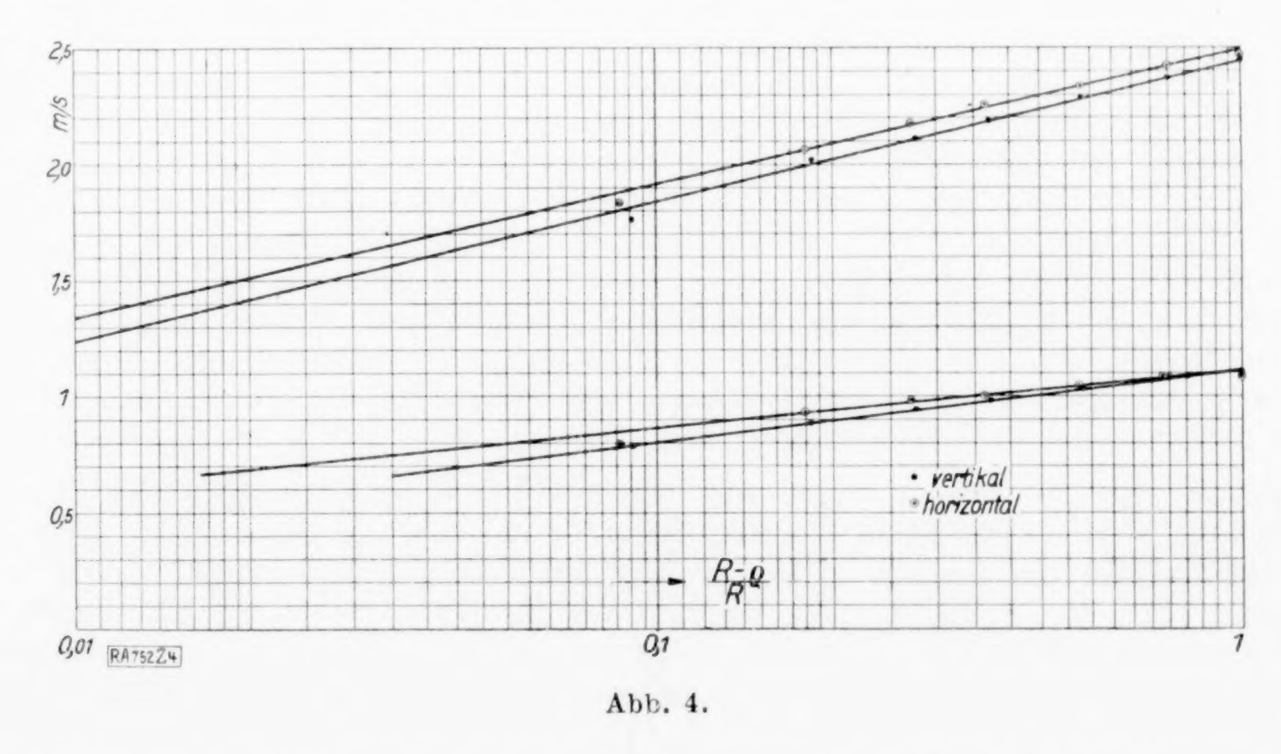


Abb. 4.

In Abb. 4 sind 4 Geschwindigkeitsmessungen in einem Kreisrohr von 1608 mm Durchmesser der Central del Cinca der S. A. Hidroelectrica Iberica — Bilbao aufgetragen [1]). Die Messungen sind über den ganzen Halbmesser verteilt und bis auf rd. 70 mm an die Wand ausgedehnt. Sie bestätigen sämtlich das Gesetz der logarithmischen Geschwindigkeitsverteilung. Die gemessenen Geschwindigkeiten waren die folgenden:

[1]) Die Messungen sind ausgeführt von den Verkstaden Kristinehamm in Schweden; die Ergebnisse wurden mir von Herrn Dr. Ott in Kempten freundlich zur Verfügung gestellt.

auf senkrechten Durchmesser	Messung I	Messung II	auf horizontalem Durchmesser	Messung III	Messung IV
für $\varrho = 0$ mm	$v = 2,45$ m/sek	1,105 m/sek	$\varrho = 0$ mm	$v = 2,47$ m/sek	1,085 m/sek
200,75 »	2,37 »	1,085 »	204,5 »	2,425 »	1,085 »
375,75 »	2,285 »	1,035 »	379,5 »	2,34 »	1,045 »
505,75 »	2,185 »	0,985 »	509,5 »	2,26 »	1,02 »
580,75 »	2,11 »	0,945 »	584,5 »	2,175 »	0,98 »
655,75 »	2,015 »	0,885 »	659,5 »	2,065 »	0,93 »
730,75 »	1,76 »	0,785 »	734,5 »	1,835 »	0,80 »

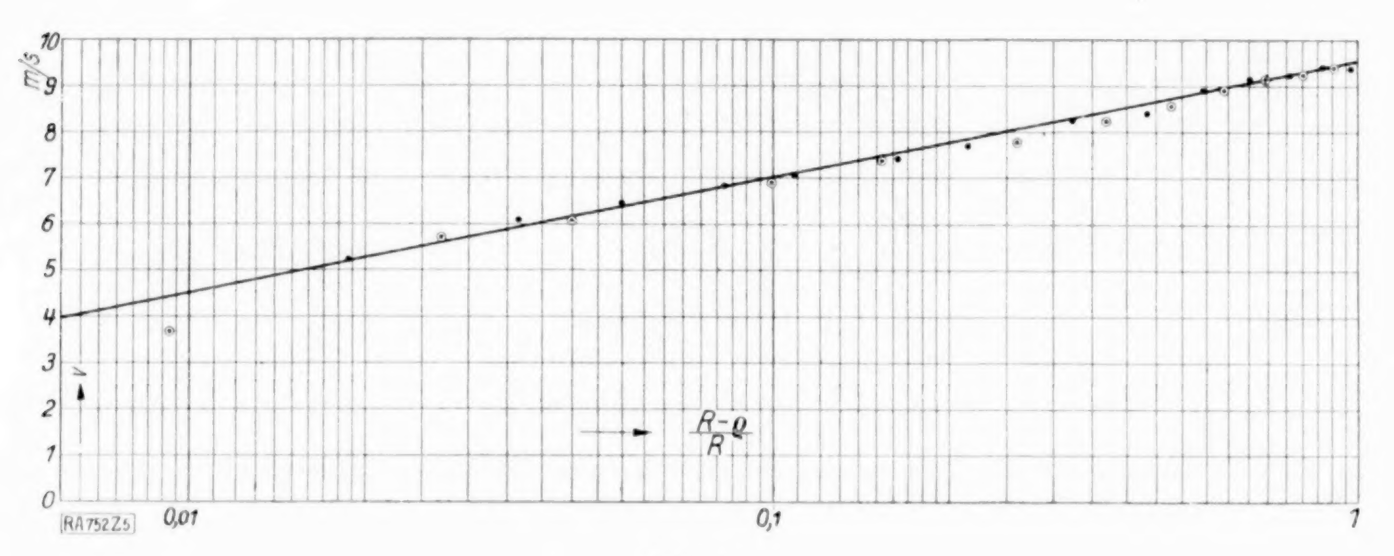


Abb. 5.

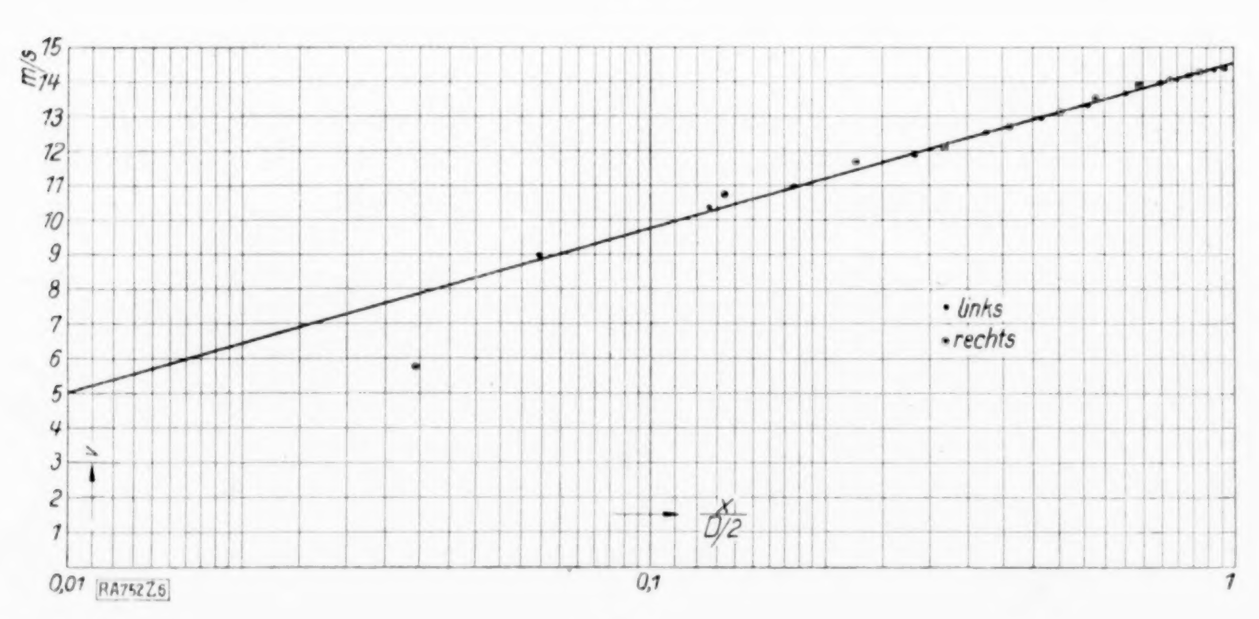


Abb. 6.

Weiter sind in Abb. 5 und 6 die neuesten genauen Messungen der Geschwindigkeitsverteilung von Nikuradse[1]) aufgetragen, und zwar in Abb. 5 für Kreisrohr von 28 mm Durchmesser und in Abb. 6 für breiten, rechteckigen Querschnitt von 8 mm Weite. Die Messung für das Kreisrohr ist bis auf rd. ein Hundertstel des Halbmessers in die Wandnähe ausgedehnt. Beide Messungen stimmen auffallend gut mit dem logarithmischen Verteilungsgesetz überein. Aus dem Schnittpunkt der logarithmischen Linie mit der Nulllinie ergibt sich auch der Wert a der Gl. (5) und (9), und zwar außerordentlich klein, wie die Gl. (10) erwarten ließ.

Wegen der Uebereinstimmung der Geschwindigkeitsverteilung in Senkrechten offener Gerinne kann auf die Veröffentlichungen unter Anm. 6 verwiesen werden.

Die Randbedingung an der Oberfläche $\frac{dv}{dz} = 0$ für $z = H$ würde auch erfüllt sein, wenn man die $\mu_1 + \mu_2$-Linie benutzt und nicht durch die bequeme punktierte Näherungs-

[1]) J. Nikuradse, Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen. VdI-Verlag 1926.

linie ersetzt hätte. Praktisch macht diese Abweichung sehr wenig aus und man kann daher die Gleichungen (5) und (9) als recht gute Näherung der Quer-Geschwindigkeitskurve ansehen.

Im Anschluß an diese Darstellung sei noch darauf hingewiesen, daß sich auch der Einfluß der Wandrauhheit in dieser Weise anschaulich deuten läßt. Denkt man sich die Wandrauhigkeit, wie in Abb. 7 angedeutet ist, als Wandvorsprünge, so kann die Seitengeschwindigkeit in die Lücken bis auf den Grund eintreten und μ_2 ist dort, wo die mittlere Längsgeschwindigkeit v in den Lücken in der Nähe der Vorsprünge gleich 0 ist, nicht mehr gleich 0, sondern hat schon eine einflußreiche Größe. Es fällt daher von der ursprünglichen Quer-Geschwindigkeitskurve anb für glatte Wandung infolge der Wandrauhigkeit das Trapez $acdb$ fort. Hierzu kommt allerdings wohl auch noch eine gewisse Beeinflussung von $\mu_{2\,max}$ durch die Rauhheit.

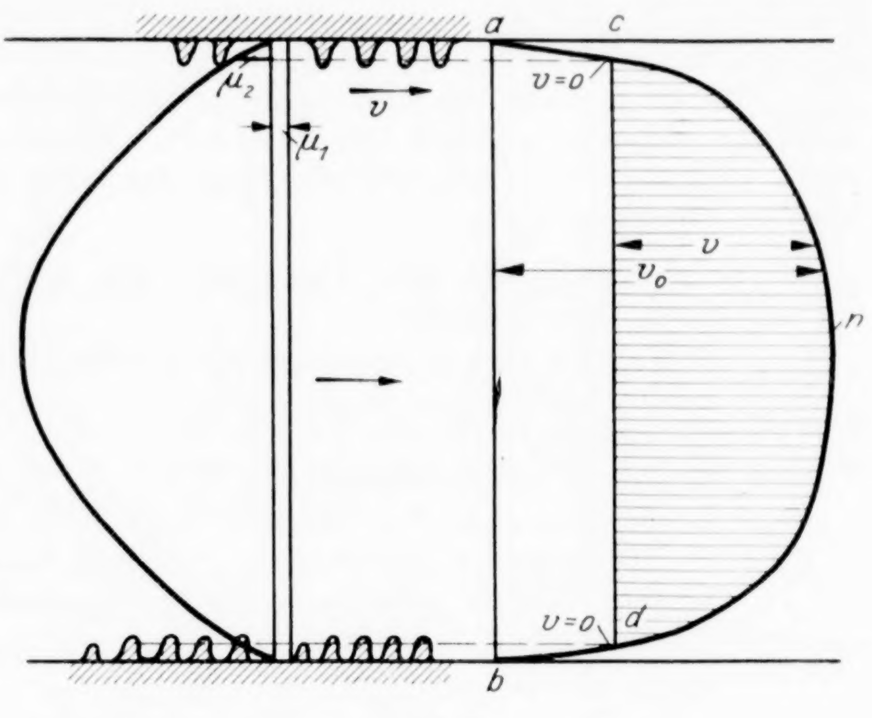


Abb. 7.

Auch eine Potenzkurve würde sich möglichenfalls für die Verteilung der Geschwindigkeit nach der Tiefe mit etwas abgeänderten Annahmen in der gleichen Weise begründen lassen; nur darf auch dann der Nullpunkt von v nicht mit dem Anfang der Kurve zusammenfallen. 752

Über Seilsteifigkeit.

Von **GEORG HAMEL** in Berlin.

Die Theorie der vollkommen biegsamen (idealen) Seile (Fäden) ist seit dem 18. Jahrhundert allgemein bekannt, ebenso die der elastischen Drähte. Ueber steife Seile, d. h. Seile mit einem Biegungsmoment, welches der Verbiegung unter Energieverlust widerstrebt, gibt es bisher zwei Theorien. Die erste[1]) behandelt die Biegungssteifigkeit nach Art der Reibung fester Körper. Findet keine Verbiegung statt, so hat das Biegungsmoment eine unbekannte Größe, also den Charakter einer Reaktionskraft, ist aber durch eine Grenzbedingung eingeschränkt. Findet jedoch Verbiegung statt, so ist das Biegungsmoment ein eingeprägtes Kraftmoment und erfüllt eine Gleichung, die sich stetig an die eben genannte Grenzbedingung anschließt. Man erhält auf diese Weise eine Seilsteifigkeit, welche die aus der Praxis bekannten Widerstände befriedigend zu erklären gestattet. Eine Schwierigkeit besteht darin, daß die vorhandenen Beobachtungen noch nicht ausreichen, jene Grenzbedingung genau festzulegen.

Die zweite Theorie behandelt die Biegungssteifigkeit wie den inneren Widerstand zäher Flüssigkeiten: Das Biegungsmoment ist der Verbiegung proportional und von solchem Vorzeichen, daß die Leistung des Biegungsmomentes negativ ist. Leider ist diese von Hrn. Bisconcini[2]) vorgelegte Theorie in allen Punkten unzutreffend, da die Leistung falsch berechnet und in der Durchführung ein Näherungsverfahren beliebt wird, von dessen Berechtigung man nicht überzeugt wird.

Im folgenden will ich erstens die zweite Theorie richtig aufstellen, zweitens zeigen, daß bei Vernachlässigung der Seildicke eine auch nur qualitative Uebereinstimmung mit der Erfahrung ausgeschlossen ist, drittens, daß bei Beachtung der Seildicke zwar eine qualitativ richtige Theorie des ablaufenden Seilstückes möglich, eine solche des auflaufenden Seilstückes aber unmöglich ist.

[1]) Hamel, Lehrbuch der Elementaren Mechanik, § 36, erste Aufl., Leipzig 1912, zweite Aufl. 1922.
[2]) Bisconcini, Sulla imperfetta flessibilità delle funi, Rend. R. Acc. dei lincei, Serie 6a, vol. I, 1925.

Angenommen wird, wie bei **Bisconcini** auch, stationäre ebene Bewegung, Vernachlässigung der Trägheit und Stetigkeit der Kräfte und Momente. Ich zeige noch, daß eine Aufgabe der beiden letzten Voraussetzungen unwesentlich bzw. unmöglich ist. Unter der Voraussetzung stationärer Bewegung kann also die erste Theorie ein befriedigendes Resultat liefern, die zweite nicht.

Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß beide Arten von Biegungssteifigkeit nebeneinander vorkommen, daß also die zweite Theorie die erste modifiziert. Auch bleibt es offen, ob etwa die zweite Theorie unter Annahme heftiger Schwingungen ein befriedigendes Resultat liefern kann.

1. Aufstellung der Theorie. Ein steifes, unausdehnbares Seil ist ein Körper mit folgender Beschaffenheit:

1. Es hat eine ausgezeichnete Mittellinie,
2. diese Mittellinie ist materiell, d. h. sie ist stets von denselben materiellen Punkten gebildet,
3. sie ist unausdehnbar,
4. die Elemente des Seils, d. h. Stücke, die von benachbarten Normalebenen zur Mittellinie ausgeschnitten werden, bewegen sich wie starre Körper, machen also nach 2. noch Drehbewegungen um die Mittellinie, die ihrerseits, abgesehen von 3. frei beweglich ist.
5. Die innere Leistung ist negativ.

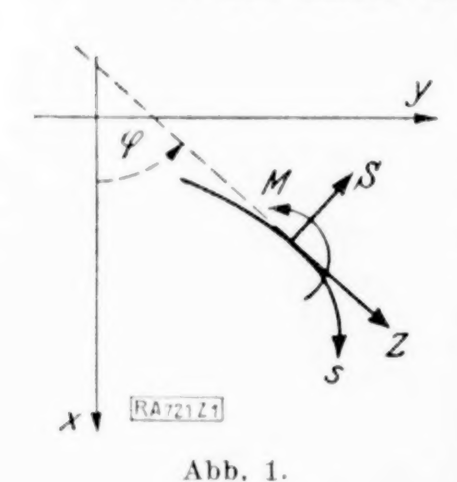


Abb. 1.

Wir beschränken uns hier auf den ebenen Fall und sehen auch von einer Drehung der Elemente um die Mittellinie ab, so daß die Elemente nur die Verdrehung $d\varphi$ des Bogenelementes ds der Mittellinie mitmachen.

s sei die Bogenlänge des Seils, φ der Winkel, den die im Sinne von s gerechnete Tangentenrichtung mit einer festen Richtung (wir nehmen sie vertikal nach unten) im mathematisch positiven Sinne einschließt. An einem Schnitt reduzieren wir die Spannung, welche ein Seilstück mit größerem s auf das vorhergehende ausübt, in bezug auf den Schnittpunkt mit der Mittellinie und erhalten die Zugkraft Z, den Schub S (positiv nach links gerechnet) und das Biegungsmoment M (auch positiv nach links gerechnet), siehe Abb. 1. Auf das Seilelement mögen, nach denselben Richtungen wie Z und S zerlegt, die äußeren Kräfte $\varkappa\, ds$ und $\lambda\, ds$, ferner das äußere Moment $M\, ds$ wirken.

Nach dem Erstarrungsprinzip, angewendet auf ein Seilelement, erhält man dann die wohlbekannten Gleichungen

$$\frac{dZ}{ds} - \frac{d\varphi}{ds} S + \varkappa = 0\,; \qquad Z\frac{d\varphi}{ds} + \frac{dS}{ds} + \lambda = 0\,; \qquad \frac{dM}{ds} + S + M = 0 \quad . \quad . \quad (1)$$

zunächst für den Fall der Ruhe.

Nun möge das Seil sich stationär bewegen, d. h. in einer festen Bahn mit konstanter Geschwindigkeit v weiterlaufen, so langsam, daß die Trägheitskräfte vernachlässigt werden können und dieselben Gleichungen gelten.

Erleidet das Seil dabei die Verschiebung $ds = v\, dt$, so leisten die äußeren Kräfte $\varkappa\, ds$, $\lambda\, ds$, $M\, ds$ die Arbeit

$$\varkappa\, ds \cdot ds + M\, ds \cdot d\varphi .$$

Multiplizieren wir demnach die Gleichungen (1) der Reihe nach mit $v\, ds$, 0 und $\frac{d\varphi}{dt} ds$ und integrieren über ein Stück s_1 bis s_2 des Seils, so erhalten wir die Gleichung der Leistung

$$L \equiv \int_{s_1}^{s_2} \left[\varkappa \frac{ds}{dt} ds + M \frac{d\varphi}{dt} ds \right] + \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{dZ}{ds}\frac{ds}{dt} ds - \frac{d\varphi}{ds} S \frac{ds}{dt} ds + S \frac{d\varphi}{dt} ds + \frac{dM}{ds}\frac{d\varphi}{dt} ds \right] = 0.$$

Die Schubkraft S hebt sich fort, ihre Leistung ist null[1]). v ist wegen der Voraussetzungen (2) und (3) von s unabhängig und kann herausgezogen werden. Somit erhalten wir nach partieller Integration

[1]) Darüber findet man Genaueres in **Hamel**, Ueber die Mechanik der Drähte und Seile, Sitzungsber. Berliner Mathem. Gesellschaft, XXV, 1925/26.

$$L = v\left\{\int_{s_1}^{s_2}(\varkappa\, d\, s + M\, d\, \varphi) + Z + M\frac{d\,\varphi}{d\,s}\Big|_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} M\frac{d^2\,\varphi}{d\,s^2}\,d\,s\right\} = 0.$$

Die drei ersten Glieder bedeuten zusammen die Leistung der äußeren Kräfte, also stellt das letzte Integral die innere Leistung L_i dar:

$$L_i = -v\int_{s_1}^{s_2} M\frac{d^2\,\varphi}{d\,s^2}\,d\,s = -v\int_{s_1}^{s_2} M\frac{d\,1/\varrho}{d\,s}\,d\,s.$$

Nun sei v positiv. Wir bekommen dann eine negative Leistung der inneren Kräfte, wenn wir

$$M = C\frac{d\,1/\varrho}{d\,s} = C\frac{d^2\,\varphi}{d\,s^2}$$

mit $C > 0$ setzen [1]). Dies ist auch der einzig mögliche Ansatz, wenn M einer Ableitung von $1/\varrho$ proportional und die Leistung stets negativ sein soll. Mit unserem Ansatz bekommen wir aus den Gleichungen (1) die neuen Gleichungen:

$$\frac{d\,Z}{d\,s} - \frac{d\,\varphi}{d\,s}S + \varkappa = 0\,; \qquad Z\frac{d\,\varphi}{d\,s} + \frac{d\,S}{d\,s} + \lambda = 0\,; \qquad C\frac{d^3\,\varphi}{d\,s^3} + S + M = 0\ .\ \ . \quad (2).$$

Darin sind S und Z unbekannte Reaktionskräfte, es muß nur noch $Z > 0$ sein, da das Seil keinen Druck aushalten kann.

2. Das Sonderproblem, die Grenzbedingungen.

Es sei nun ein Seil der bisher behandelten Art um ein kreisförmiges Rad gelegt, das von ihm angetrieben wird. Es sind drei Stücke zu unterscheiden: das auflaufende Seilstück $-\infty < s \leqq s_0$, das Seilstück auf dem Rad $s_0 \leqq s \leqq s_1$ und das ablaufende Seilstück $s_1 \leqq s < \infty$. A sei die Auflaufstelle, B die Ablaufstelle. Zu A möge $\varphi = \varphi_0 = \pi - \psi_0$, zu B aber $\varphi = \varphi_1$ gehören. ψ_0 und φ_1 sind als Unbekannte anzusehen.

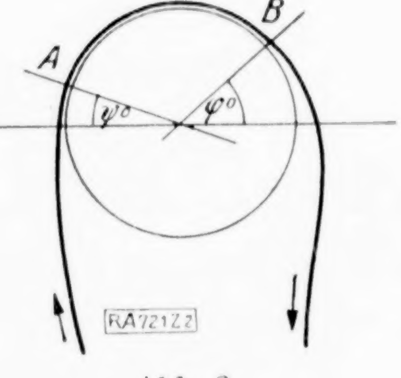


Abb. 2.

Nach den Prinzipien der Mechanik müssen Z und S jedenfalls stetig sein. Wir wollen auch zunächst die Krümmung und M als stetig ansehen. Dagegen können die Ableitungen $\frac{d\,Z}{d\,s}$, $\frac{d\,S}{d\,s}$ und $\frac{d\,M}{d\,s}$, also auch $\frac{d^3\,\varphi}{d\,s^3}$ in den Stellen A und B Sprünge erleiden, nämlich da, wo $\varkappa$, λ, M solche aufweisen.

Nun ist auf dem zweiten Stück AB die Krümmung konstant, also $\frac{d^2\,\varphi}{d\,s^2}$, $\frac{d^3\,\varphi}{d\,s^3}$ null, während $\frac{d\,\varphi}{d\,s} = -\frac{1}{r}$ ist, wenn r der Radius der Kreisscheibe ist, bis zur Seilmitte gerechnet. Also haben wir die ersten Grenzbedingungen: In A und B sind

$$\frac{d\,\varphi}{d\,s} = -\frac{1}{r},\ \frac{d^2\,\varphi}{d\,s^2} = 0\,, \quad \text{also auch} \quad M = 0,\ \varphi = \pi - \psi_0\,, \quad \text{resp.} \quad \varphi = \varphi_1.$$

Weitere Grenzbedingungen erhalten wir so: An den Enden des Seiles, also für $s = \pm\infty$ [2]) sei das Seil nur einem Zug unterworfen, also $S_\infty = 0$, $M_\infty = 0$ d. h. $\left(\frac{d^2\,\varphi}{d\,s^2}\right)_\infty = 0$. Außerdem sei das Seil dort vertikal, also $\varphi = \pi$ im auflaufenden, $\varphi = 0$ im ablaufenden Teil, ferner die Krümmung null, also beiderseits $\frac{d\,\varphi}{d\,s} = 0$.

Auf den freien Seilstücken seien noch $\varkappa$, λ, $M = 0$, d. h. wir sehen von jeder äußeren Kraftwirkung längs des Seils dort ab.

Wendet man nun Schwerpunkts- und Momentensatz auf die freien Teile an, so müssen für sie die Summe der Kräfte und die Summe der Momente null sein. Da weder

[1]) Hr. Bisconcini berechnet die innere Leistung zu $v\int M\frac{1}{\varrho}\,d\,s$ und setzt M proportional $\frac{d^2\,1/\varrho}{d\,s^2}$, um eine negative Leistung zu erhalten. Dies trifft aber nur zu, wenn an beiden Enden $\frac{1}{\varrho}\frac{d\,1/\varrho}{d\,s} = 0$ ist.

[2]) Hr. Bisconcini hat die Seillänge 1, das ist unwesentlich, wenn auch nicht für seine Methode, die an Schwerpunkts- und Momentensatz vorbeigeht.

in A noch in B noch an den Enden Momente vorhanden sind, müssen die Asymptoten des Seils beiderseits durch A und B hindurchgehen und außerdem ist

$$\text{in } A \quad Z = Z_0 = Z_{-\infty} \cos \psi_0 ; \quad S = S_0 = Z_{-\infty} \sin \psi_0 ,$$
$$\text{in } B \quad Z = Z_1 = Z_\infty \cos \varphi_1 ; \quad S = S_1 = - Z_\infty \sin \varphi_1 .$$

Auf den freien Stücken lauten nun die Gleichungen (2)

$$\frac{dZ}{d\varphi} - S = 0 ; \quad \frac{dS}{d\varphi} + Z = 0 ; \quad C \frac{d^3 \varphi}{d s^3} + S = 0 .$$

Die beiden ersten Gleichungen lassen sich integrieren und ergeben mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen:

$$\text{in dem auflaufenden Teil:} \quad Z = - Z_{-\infty} \cos \varphi , \quad S = Z_{-\infty} \sin \varphi ,$$
$$\text{in dem ablaufenden Teil:} \quad Z = Z_\infty \cos \varphi , \quad S = - Z_\infty \sin \varphi .$$

Folglich lautet die dritte Gleichung:

$$\text{links} \quad \frac{d^3 \varphi}{d s^3} = - \frac{Z_{-\infty}}{C} \sin \varphi = - \alpha_0^3 \sin \varphi \quad \text{mit} \quad \alpha_0 = \sqrt[3]{\frac{Z_{-\infty}}{C}} > 0 ,$$

$$\text{rechts} \quad \frac{d^3 \varphi}{d s^3} = + \frac{Z_\infty}{C} \sin \varphi = + \alpha_1^3 \sin \varphi \quad \text{mit} \quad \alpha_1 = \sqrt[3]{\frac{Z_\infty}{C}} > 0 .$$

Setzen wir noch links allgemein $\varphi = \pi - \psi$, so erhalten wir links

$$\frac{d^3 \psi}{d s^3} = \alpha_0^3 \sin \psi .$$

3. Durchführung. Der ablaufende Teil: Wir machen von folgender Näherung Gebrauch. Bei genügend starker Belastung (Z_∞ groß) wird φ dauernd sehr klein sein, nicht so $\frac{d\varphi}{ds}$, das ja $-\frac{1}{r}$ werden kann. Folglich dürfen wir $\sin \varphi$ mit φ vertauschen und erhalten

$$\frac{d^3 \varphi}{d s^3} = \alpha_1^3 \varphi .$$

Das Integral ist, unter Berücksichtigung der Bedingungen für $s \to + \infty$

$$\varphi = e^{-\frac{\alpha_1}{2}(s - s_1)} \left(\beta \cos \frac{1}{2} \sqrt{3}\, \alpha_1 (s - s_1) + \gamma \sin \frac{1}{2} \sqrt{3}\, \alpha_1 (s - s_1) \right)$$

mit β, γ als Integrationskonstanten. φ ist also als Funktion von s eine gedämpfte Schwingung. Aus den Grenzbedingungen für $s = s_1$, nämlich $\varphi = \varphi_1$, $\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{1}{r}$, $\frac{d^2 \varphi}{d s^2} = 0$ erhält man

$$\varphi = \frac{1}{r \alpha_1} e^{-\frac{\alpha_1}{2}(s - s_1)} \left(\cos \frac{1}{2} \sqrt{3}\, \alpha_1 (s - s_1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{1}{2} \sqrt{3}\, \alpha_1 (s - s_1) \right) ,$$

so daß sich das bisher unbekannte φ_1 zu $\varphi_1 = \frac{1}{r \alpha_1}$ ergibt, also positiv, wie die Abb. 2 zeigt. Dies widerspricht den üblichen Zeichnungen, was aber noch keinen Widerspruch mit der Erfahrung bedeuten muß, φ ist in der Tat klein, wenn φ_1 klein, d. h. Z_∞ gegen $\frac{C}{r^3}$ groß ist. Die Zugkraft Z_∞ wirkt an dem um $e = r(1 - \cos \varphi_1)$ verkürzten Hebelarm,

$$e \approx r \frac{1}{2} \varphi_1^2 = \frac{1}{2r} \alpha_1^2 = \frac{1}{2r} \left(\frac{C}{Z_\infty} \right)^{2/3} .$$

Coulomb gab statt dessen aus der Erfahrung die Formel

$$e = a + \frac{b}{Z_\infty} ,$$

also von r unabhängig [1]). Jedenfalls ergibt sich qualitativ die erfahrungsmäßige Erscheinung am ablaufenden Seilstück.

Nun das auflaufende Seilstück. Machen wir hier dieselbe Annäherungsbetrachtung (ψ ist jetzt klein), so bekommen wir

$$\frac{d^3 \psi}{d s^3} = \alpha_0^3 \psi ,$$

[1]) Weitere Literatur siehe Encyclopädie der math. Wiss. IV. 10 (v. Mises) Nr. 20c.

also jetzt, da ψ für $s \to -\infty$ mitsamt den ersten Ableitungen klein werden soll,

$$\psi = \psi_0 \, e^{\alpha_0 (s - s_0)}.$$

Damit aber lassen sich die Grenzbedingungen bei A nicht erfüllen. Auch ohne Vernachlässigung kann streng bewiesen werden, daß eine Lösung von

$$\frac{d^3 \psi}{d s^3} = \alpha_0^3 \sin \psi \qquad (\alpha_0 > 0),$$

welche für $s = s_0$ die Grenzbedingungen $\psi = \psi_0$ (unbekannt), $\frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{r}$, $\frac{d^2\psi}{ds^2} = 0$ erfüllt, unmöglich $\lim\limits_{s = -\infty} \psi = 0$ erfüllen kann.

Denn gäbe es eine solche Lösung, so folgte aus der Differentialgleichung nach Multiplikation mit $\frac{d\psi}{ds}$ und partieller Integration von $s = s_0$ an

$$\psi' \psi'' - \int_{s_0}^{s} \psi''^2 \, d s = - \alpha_0^3 (\cos \psi - \cos \psi_0).$$

Setzen wir $s = -\sigma$, so bekommen wir

$$\frac{d\psi}{d\sigma} \frac{d^2\psi}{d\sigma^2} - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left(\frac{d^2\psi}{d\sigma^2}\right)^2 d\sigma = \alpha_0^3 (\cos \psi - \cos \psi_0),$$

also

$$\frac{d\psi}{d\sigma} \frac{d^2\psi}{d\sigma^2} = \alpha_0^3 (\cos \psi - \cos \psi_0) + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \left(\frac{d^2\psi}{d\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Da das erste Glied der rechten Seite gegen $2\,\alpha_0^3 \sin^2 \frac{\psi^0}{2} > 0$ strebt, das zweite mit σ wächst und sicher positiv ist, so ist die rechte Seite für $\sigma > \sigma_1$ sicher größer als eine feste positive Zahl $^1/_2\, m^2$. Also

$$\frac{d\psi}{d\sigma} \frac{d^2\psi}{d\sigma^2} > \frac{1}{2} m^2 \quad \text{für } \sigma > \sigma_1,$$

also

$$\left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)_1^2 > m^2 (\sigma - \sigma_1) \to \infty \quad \text{für } \sigma \to \infty.$$

Mithin $\frac{d\psi}{d\sigma} \to \infty$ und so kann nicht $\psi \to 0$ gehen. Der Fall $\psi_0 = 0$, $\frac{d^2\psi}{d\sigma^2} = 0$ ist wegen $\psi_{-\infty} = 0$ und $\left|\frac{d\psi}{ds}\right| = \frac{1}{r}$ ausgeschlossen. Also müßte das auflaufende Seilstück eine Gestalt haben, die schon qualitativ jeder Erfahrung widerspricht.

Endlich noch das Seilstück auf dem Rad. Hier wird die Dicke $2\,\varepsilon$ des Seiles von Bedeutung. Seien N und R Normaldruck bzw. Reibung zwischen Seil und Rad, so ist in die Gleichungen (2) zu setzen

$$\varkappa = -R, \qquad \lambda = N, \qquad M = -\varepsilon R.$$

Dagegen ist $\frac{d^3\varphi}{ds^3} = 0$, da $\frac{d\varphi}{ds}$ konstant gleich $-\frac{1}{r}$ ist. Also bekommen wir aus (2)

$$\frac{dZ}{ds} + S\frac{1}{r} - R = 0; \qquad -Z\frac{1}{r} + \frac{dS}{ds} + N = 0; \qquad S = R\varepsilon.$$

Aus der letzten Gleichung sieht man, daß bei $\varepsilon = 0$, $S = 0$ sein müßte. Da S stetig sein muß, müßten auch in A und B S_0 resp. S_1 null sein, d. h. $\psi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$. Das aber widerspricht $\varphi_1 = \frac{1}{r\,\alpha_1}$. Ohne Beachtung der Seildicke ist also die Theorie undurchführbar. Aus der ersten und letzten Gleichung erhält man

$$R = \frac{S}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{r}} \frac{dZ}{ds} = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{r}} \frac{dZ}{ds}$$

(es ist sicher $\varepsilon < r$). Aus der zweiten Gleichung und aus dieser Beziehung weiter

$$N = \frac{1}{r} Z - \frac{\varepsilon}{1 - \frac{\varepsilon}{r}} \frac{d^2 Z}{d s^2} \geq 0.$$

Da noch $|R| \leqq f N$ sein muß, wo f der Reibungskoeffizient ist, so folgt für das Stück AB nur die Differentialungleichheit

$$\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{r}}\left|\frac{dZ}{ds}\right| \leqq f\left|\frac{1}{r} Z - \frac{\varepsilon}{1-\frac{\varepsilon}{r}} \frac{d^2 Z}{d s^2}\right|,$$

die für $\varepsilon = 0$ in die bekannte Eulersche übergeht und integriert eine bekannte Ungleichheit für Z_0 und Z_1 ergibt.

4. Berücksichtigung der Trägheit. Die Theorie wird nicht wesentlich schwieriger, wenn man die Trägheit beachtet, aber an der Annahme stationärer Bewegung festhält.

Sei μ die Dichte des Seils, F der Querschnitt, J das Trägheitsmoment des Querschnitts, so sind die Gleichungen (1) zu ersetzen durch

$$\frac{dZ}{ds} - \frac{d\varphi}{ds} S + \varkappa = 0\,; \quad Z\frac{d\varphi}{ds} + \frac{dS}{ds} + \lambda = \mu F v^2 \frac{d\varphi}{ds}\,; \quad \frac{dM}{ds} + S + M = \mu J \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$
$$= \mu J v^2 \frac{d^2 \varphi}{d s^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Angenommen ist, daß der Massenmittelpunkt des Seilelementes auf der Mittellinie liegt.

Da die innere Arbeit sich nicht ändert, bleibt der Ansatz

$$M = C\frac{d^2\varphi}{ds^2}.$$

Mit $\varkappa = \lambda = M = 0$ ergeben sich für die freien Seilteile die Gleichungen

$$\frac{dZ}{d\varphi} = S\,, \qquad \frac{dS}{d\varphi} + Z = \mu F v^2 = H = \text{konst.}\,,$$

die sich unter Benutzung der Grenzbedingungen zu

$$Z = H + (Z_\infty - H)\cos\varphi \quad \text{und} \quad S = -(Z_\infty - H)\sin\varphi$$

für das ablaufende Stück und

$$Z = H - (Z_{-\infty} - H)\cos\varphi \quad \text{und} \quad S = (Z_{-\infty} - H)\sin\varphi$$

für das auflaufende Stück integrieren.

Damit nimmt die Momentengleichung die Form an (ablaufender Teil)

$$C\frac{d^3\varphi}{ds^3} - (Z_\infty - H)\sin\varphi = G\frac{d^2\varphi}{ds^2}\,,$$

wo zur Abkürzung $G = \mu J v^2$ gesetzt ist. Mit $\frac{Z_\infty - H}{C} = \alpha_1{}^3$ und $\frac{G}{C} = 3\beta$ und $\sin\varphi \approx \varphi$ wird daraus

$$\varphi''' - 3\beta\varphi'' - \alpha_1{}^3\varphi = 0\,,$$

während für den auflaufenden Teil mit $\frac{Z_{-\infty} - H}{C} = \alpha_0{}^3$, $\varphi = \pi - \psi$

$$\psi''' - 3\beta\psi'' - \alpha_0{}^3\psi = 0$$

daraus wird ($\beta > 0$).

Die zugehörigen determinierenden Gleichungen

$$u^3 - 3\beta u^2 - \alpha^3 = 0 \; (\alpha = \alpha_0 \text{ oder } \alpha_1)$$

haben bei $\alpha > 0$ eine positiv reelle Wurzel und zwei Wurzeln mit negativ reellen Bestandteilen. In diesem Falle bleibt also wesentlich alles beim alten.

Wenn aber $\alpha < 0$ (d. h. v so groß, daß $H > Z_\infty$ bzw. $Z_{-\infty}$), so gibt es sicher eine negativ reelle Wurzel und zwei Wurzeln mit positiv reellen Bestandteilen. Auch hier bleibt prinzipiell alles dasselbe, nur daß sich die Rollen von ablaufendem und auflaufendem Teil vertauschen.

Günstig wäre der Fall $Z_\infty > H > Z_{-\infty}$, weil sich jetzt beiderseits die Grenzbedingungen an der Auflauf- bzw. Ablaufstelle erfüllen ließen.

Die Ablösungsstellen A und B liegen jetzt nicht auf den Asymptoten. Die Differentialgleichung läßt sich wegen $\sin\varphi\, ds = dy$ auch

$$C\,d\frac{d\,1/\varrho}{ds} - (Z_\infty - H)\,dy = G\,d\frac{1}{\varrho}$$

schreiben, was integriert

$$C\,\Delta\frac{d}{ds}\frac{1}{\varrho} - (Z_\infty - H)\,\Delta y = G\,\Delta\frac{1}{\varrho}$$

gibt. Wegen $\frac{d}{d\,s}\frac{1}{\varrho} = 0$ an beiden Enden gibt das

$$-(Z_\infty - H)(y_\infty - y_1) = G\,1/r$$

also

$$y_1 = y_\infty + \frac{1}{r}\,\frac{G}{Z_\infty - H}.$$

Einen Ausnahmefall bildet $Z_\infty = H$, was bei sehr großer Geschwindigkeit eintreten könnte. Dieser Fall nimmt, wie man überblickt, in jeder Beziehung eine Ausnahmestellung ein. Es kommt ihm aber wohl keine praktische Bedeutung zu, da bei großen Geschwindigkeiten sicher nicht mehr stationäre Bewegung angenommen werden darf. Diese Bemerkung betrifft alle zuletzt behandelten Fälle ($\alpha \leqq 0$).

5. Sind Unstetigkeiten möglich? Man könnte daran denken, durch Annahme von Unstetigkeiten stärkere Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu erhalten, zumal in der Ruhelage an den Stellen A und B sicher Unstetigkeiten der Krümmung eintreten werden.

Z und S müssen nach den Prinzipien der Mechanik sicher stetig sein, da unendliche Massenbeschleunigungen durch die Annahme stationärer Bewegung ausgeschlossen sind. Dagegen könnten M und damit auch die Krümmung $\frac{1}{\varrho} = \frac{d\,\varphi}{d\,s}$ an den Stellen A und B unstetig sein.

Aus der dritten Gleichung von (3) folgte durch Integration über die Sprungstelle und Grenzübergang

$$\Delta\frac{d^2\varphi}{d\,s^2} = \frac{G}{C}\,\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s}\,(G = \mu\,J\,v^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Wie eine leichte Rechnung zeigt, genügte formal die gewonnene Konstante $\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s}$, d. h. der noch zur Verfügung stehende Sprung der Krümmung, die Grenzbedingungen für das auflaufende Seil zu befriedigen.

Aber man käme zum Widerspruch mit dem Energiesatz: der Sprung bedeutete einen Gewinn an Energie. Es ergäbe sich nämlich durch Integration über die Sprungstelle und Grenzübergang für die positive Größe

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\int_{s_0-\varepsilon}^{s_0+\varepsilon} M\frac{d^2\varphi}{d\,s^2}\,d\,s = \Delta\left(M\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right) - \int_{s_0-0}^{s_0+0}\frac{d\,M}{d\,s}\frac{d\,\varphi}{d\,s}\,d\,s$$

oder nach der dritten Gleichung

$$= \Delta\left(M\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right) - G\int_{s_0-0}^{s_0+0}\frac{d^2\varphi}{d\,s^2}\frac{d\,\varphi}{d\,s}\,d\,s + \int_{s_0-0}^{s_0+0} S\frac{d\,\varphi}{d\,s}\,d\,s + \int_{s_0-0}^{s_0+0} M\frac{d\,\varphi}{d\,s}\,d\,s$$

oder wegen der Endlichkeit von S und M und der Stetigkeit von φ

$$= \Delta\left(M\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right) - \frac{G}{2}\,\Delta\left(\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)^2 = C\,\Delta\left(\frac{d^2\varphi}{d\,s^2}\,\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right) - \frac{G}{2}\,\Delta\left(\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)^2$$

$$= C\frac{d\,\varphi}{d\,s}\,\Delta\frac{d^2\varphi}{d\,s^2} + C\frac{d^2\varphi}{d\,s^2}\,\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s} + C\,\Delta\frac{d^2\varphi}{d\,s^2}\,\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s} - \frac{G}{2}\,\Delta\left(\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)^2.$$

(Hier sind die Funktionswerte vor dem Sprung gemeint.)

Nun ist nach (4)

$$C\,\Delta\frac{d^2\varphi}{d\,s^2} = G\,\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s},$$

und da nach dem Auflaufen $\frac{d^2\varphi}{d\,s^2} = 0$ ist, so ist vor dem Auflaufen

$$\frac{d^2\varphi}{d\,s^2} = -\Delta\frac{d^2\varphi}{d\,s^2} = -\frac{G}{C}\,\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s}.$$

Setzt man dies oben ein, so bekommt man

$$G\left\{\frac{d\,\varphi}{d\,s}\,\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s} - \left(\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)^2 + \left(\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)^2 - \frac{1}{2}\,\Delta\left(\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)^2\right\} = G\left\{\frac{d\,\varphi}{d\,s}\,\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s} - \frac{1}{2}\,\Delta\left(\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)^2\right\}$$

$$= G\left\{\frac{d\,\varphi}{d\,s}\,\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s} - \frac{1}{2}\left[2\frac{d\,\varphi}{d\,s}\,\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s} + \left(\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)^2\right]\right\} = -\frac{1}{2}\,G\left(\Delta\frac{d\,\varphi}{d\,s}\right)^2 < 0$$

und damit einen Widerspruch. Annahme von Unstetigkeit ist also unzulässig. Es ist ja auch plausibel, daß Seilsteifigkeit, die doch einer Verbiegung Widerstand entgegensetzt, keine plötzliche Verbiegung zulassen wird. 721

Berlin, im Oktober 1926.

Festigkeitsberechnung von rotierenden konischen Scheiben.

Von **E. HONEGGER** in Zürich.

Die Festigkeitsberechnung konischer Scheiben wird dadurch erschwert, daß die Differentialgleichung, auf deren Lösung das Problem hinausläuft, durch die gewöhnlichen Funktionen nicht integriert werden kann, sondern zu unendlichen (hypergeometrischen) Reihen führt [1]. Konische Scheiben sind aber, besonders im Dampfturbinenbau, sehr verbreitet und ihre Beanspruchung ist bisher allgemein nur mit Hilfe der bekannten Näherungsmethoden berechnet worden. Die nachfolgende strenge Lösung kann mit den Näherungsverfahren sehr gut konkurrieren, da ihre praktische Anwendung weder zeitraubend ist, noch größere mathematische Kenntnisse voraussetzt: die ein für allemal bestimmten Funktionswerte können für jeden einschlägigen Fall benutzt werden.

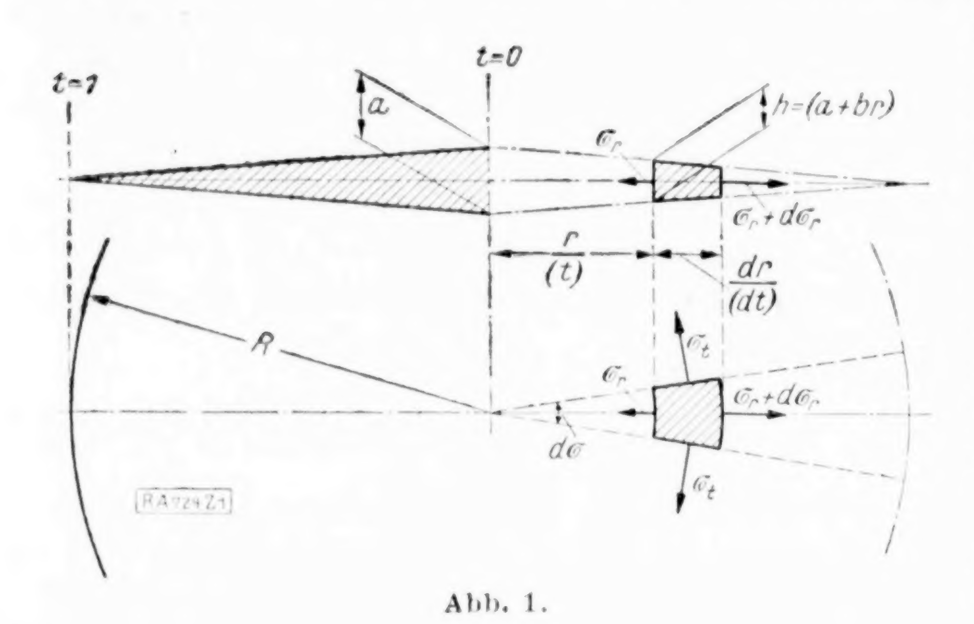


Abb. 1.

Das Lösungsverfahren ist zuerst in der Dissertation des Verfassers [2]) entwickelt und auf einige Spezialfälle angewandt worden. Die nachfolgende Erweiterung löst die Aufgabe vollständig und bezieht jede nach außen verjüngte konische Scheibe in ihren Bereich.

Gestützt auf den Satz von Castigliano ist die vorliegende Aufgabe im »Engineering« vom 5., 26. Januar und 18. Mai 1923 ebenfalls gelöst worden.

Der nachfolgenden Untersuchung liegen die üblichen vereinfachenden Annahmen zugrunde, deren Zulässigkeit durch die Erfahrung reichlich erwiesen ist.

Bezeichnungen, sofern diese nicht aus Abb. 1 hervorgehen.

μ kg/cm^{-4} sec^2 = spezifische Masse.
ω sec^{-1} = Winkelgeschwindigkeit.
E kg/cm^{-2} = Elastizitätsmodul ($2{,}1 \times 10^6$ für Stahl in Rechnung gesetzt).
ν = Querkontraktionskoeffizient (0,3 für Stahl in Rechnung gesetzt).
ξ cm = radiale Verschiebung.

$$F(a, b, c, t) = 1 + \frac{a\,b}{1 \cdot c}\,t + \frac{a\,(a+1)\,b\,(b+1)}{2!\,c\,(c+1)}\,t^2 + \frac{a\,(a+1)\,(a+2)\,b\,(b+1)\,(b+2)}{3!\,c\,(c+1)\,(c+2)}\,t^3 + \ldots$$

$$A = \frac{(1-\nu^2)\,\mu\,\omega^2}{E}.$$

$\dot{}$ (Punkt) = Ableitung nach t; $'$ (Strich) = Ableitung nach r.

1. Ableitung der Grundgleichung. Das Gleichgewicht der radialen Kraftkomponenten an dem in Abb. 1 hervorgehobenen Element der Scheibe führt zu der Gleichung:

$$h\,d\,r\,\sigma_t\,d\,\varphi - \frac{d\,(\sigma_r\,h\,r\,d\,\varphi)}{d\,r}\,d\,r = r\,d\,\varphi\,d\,r\,h\,r\,\mu\,\omega^2$$

$$h\,\sigma_t - \frac{d}{d\,r}\,(h\,r\,\sigma_r) = h\,r^2\,\mu\,\omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Spannungen und Formänderungen sind durch die Bedingungen:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{d\,\xi}{d\,r} + \nu\,\frac{\xi}{r}\right), \qquad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\xi}{r} + \nu\,\frac{d\,\xi}{d\,r}\right)$$

[1]) Man vergl. z. B. A. Stodola, »Dampfturbinen«: IV. Aufl., S. 244 oder VI. Aufl., S. 312 bis 326.

[2]) »Festigkeitsberechnung von Kegelschalen mit linear veränderlicher Wandstärke«. E. T. H. 1919. — Die theoretischen Grundlagen zu diesen Arbeiten hat Hr. Professor Meißner entwickelt und 1914 erstmals in seiner Vorlesung vorgetragen.

miteinander verknüpft. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke geht Gl. (1) in die nachfolgende Differentialgleichung für die radiale Verschiebung ξ über:

$$h\,r\,\frac{d^2\xi}{d\,r^2}+\left(h+\frac{d\,h}{d\,r}\,r\right)\frac{d\,\xi}{d\,r}+\left(\nu\,\frac{d\,h}{d\,r}-\frac{h}{r}\right)\xi=-\frac{1-\nu^2}{E}\,h\,r^2\,\mu\,\omega^2\quad\ldots\quad(2).$$

Die Scheibendicke sei durch den Ausdruck gegeben:

$$h=a+b\,r\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(3),$$

wo b für eine nach außen verjüngte Scheibe negativ ist. Es empfiehlt sich, an Stelle von r eine neue unabhängige Variable t einzuführen, welche für die Scheiben-Achse mit r verschwindet und für den Kreis R, auf welchem die Dicke zu Null wird, den Wert 1 annimmt. Die ganze Scheibe liegt daher zwischen den Argumenten 0 und 1, und es gelten die Beziehungen:

$$r=-\frac{a}{b}\,t,\quad h=a+b\,r=a-a\,t=a(1-t),\quad t=-\frac{b}{a}\,r,\quad \frac{d}{d\,r}=-\frac{b}{a}\,\frac{d}{d\,t},\quad \frac{d^2}{d\,r^2}=\frac{b^2}{a^2}\,\frac{d^2}{d\,t^2}\quad(4).$$

Durch diese Variablen-Transformation geht die Differentialgleichung (2) in die Form über:

$$\frac{d^2\xi}{d\,t^2}+\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)\frac{d\,\xi}{d\,t}+\left(-[1-\nu]+\frac{1}{t}\right)\frac{\xi}{t\,(t-1)}=\frac{a^3\,(1-\nu^2)}{b^3\,E}\,\mu\,\omega^2\,t\quad\ldots\quad(5).$$

Die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung zweiten Grades besteht aus einem sie befriedigenden Partikulärintegral, additiv verbunden mit zwei, mit Integrationskonstanten behafteten Lösungen der reduzierten Gleichung. Die reduzierte oder homogene Differentialgleichung geht aus (5) durch Nullsetzen der rechten Seite hervor. Die beiden Integrationskonstanten sind so festzulegen, daß die Randbedingungen befriedigt sind.

2. Integration der reduzierten Differentialgleichung. Die Differentialgleichung:

$$\xi^{\cdot\cdot}+\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}\right)\xi^{\cdot}+\left(-[t-\nu]+\frac{1}{t}\right)\frac{\xi}{t\,(t-1)}=0\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

entspricht der Normalform der hypergeometrischen Differentialgleichung. Ein erstes Integral läßt sich daher ohne weiteres angeben:

$$\left.\begin{aligned}\xi_1&=t\cdot F\left(\left[\frac{3}{2}+\varrho\right]\cdot\left[\frac{3}{2}-\varrho\right]\cdot 3,\,t\right)=t\cdot\left(1+\frac{\left(\frac{3}{2}+\varrho\right)\cdot\left(\frac{3}{2}-\varrho\right)}{1\cdot 3}\,t\right.\\&\left.+\frac{\left(\frac{3}{2}+\varrho\right)\left(\frac{3}{2}+\varrho+1\right)\left(\frac{3}{2}-\varrho\right)\left(\frac{3}{2}-\varrho+1\right)}{2\,!\,3\cdot 4}\,t^2+\ldots\right)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(7),$$

in welcher Schreibweise die Abkürzung eingeführt wurde:

$$\varrho=\frac{1}{2}\sqrt{5-4\,\nu}.$$

Durch Einsetzen kann leicht nachgewiesen werden, daß die hypergeometrische Reihe (7) die Gl. (6) befriedigt.

Die ebenso leicht zu ermittelnde zweite, von der ersten unabhängige Lösung nimmt die Form an:

$$\xi_2=t^{-1}\cdot F\left(\left[\varrho-\frac{1}{2}\right],\left[-\varrho-\frac{1}{2}\right],-1,t\right)\quad\ldots\ldots\quad(8)$$

und wird daher unbrauchbar, da der negativ ganzzahlige Faktor -1 im Nenner, um 1 vermehrt zu Null wird und alle Glieder der unendlichen Reihe vom dritten an unendlich groß machen würde. Eine brauchbare zweite Lösung kann aber durch einen Grenzübergang, der das unbegrenzte Wachsen der Glieder von ξ_2 vermeidet, durch passende Kombination von (8) mit (7) gefunden werden: ξ_2 wird unbrauchbar, weil der dritte Faktor der hypergeometrischen Reihe negativ und ganzzahlig ist, welcher Umstand seinerseits eine Folge des ganzzahligen Zählers des ersten Summanden im Koeffizienten von $\xi^{\cdot}$ in Differentialgleichung (6) ist. Die Reihe wird hingegen endlich, wenn die störenden ganzzahligen Faktoren um eine kleine Größe vermehrt werden, welche dann später wieder verschwindend klein werden soll, nachdem durch Multiplikation mit einem passenden konstanten Koeffizienten das Unendlich-Werden der spätern Glieder vermieden wird.

Der angedeutete Uebergang soll aber hier nicht weiter ausgeführt werden: in der angeführten Dissertation ist er ausführlich besprochen; eingehende Angaben darüber sind

zu finden in der Autographie »Ueber die hypergeometrische Funktion« von Prof. Felix Klein (Teubner, 1906). An dieser Stelle sei nur das ermittelte Endergebnis angeführt, dessen Richtigkeit wiederum durch Einsetzen in die Differentialgleichung (6) geprüft werden kann:

$$\xi_2 = \frac{-2}{\left(\varrho-\frac{1}{2}\right)\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)\left(-\varrho-\frac{1}{2}\right)\left(-\varrho+\frac{1}{2}\right)} t^{-1} + \frac{2}{\left(\varrho+\frac{1}{2}\right)\left(-\varrho+\frac{1}{2}\right)} + \xi_1 \, lg\, t + t\, \Theta_2(t) \qquad (9),$$

worin $\Theta_2(t)$ eine unendliche Reihe ist, deren Gesetz lautet:

$$\Theta_2(t) = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \ldots + C_\nu t^\nu + \ldots$$

$$C_\nu = \frac{\left(\frac{3}{2}+\varrho\right)\left(\frac{3}{2}+\varrho+1\right)\ldots\left(\frac{3}{2}+\varrho+\nu-1\right)\left(\frac{3}{2}-\varrho\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-\varrho+\nu-1\right)}{\nu!\; 3\cdot 4\cdot 5\ldots(3+\nu-1)}$$

$$\sum_{n=0}^{\nu-1}\left(\frac{1}{\varrho+\frac{3}{2}+n} + \frac{1}{-\varrho+\frac{3}{2}+n} - \frac{1}{1+n} - \frac{1}{3+n}\right) \quad \ldots\ldots \quad (10).$$

Sowohl ξ_1 als ξ_2 konvergieren sicher, falls $t < 1$ ist. Jedoch wird die Konvergenz mit zunehmendem Argumentwert schlechter; schon für $t = {}^1/_2$ müssen mindestens die ersten 20 Glieder der Reihen benutzt werden, soll der Funktionswert mit der wünschenswerten Genauigkeit berechnet werden. Für noch größere t würde die Berechnung schon sehr beschwerlich. Es empfiehlt sich daher die gefundenen Lösungen nur im Bereich von 0 bis ${}^1/_2$ zu benutzen und für das Intervall $t = {}^1/_2$ bis $t = 1$ weitere Integrale zu suchen, welche durch Potenzreihen nach $(1 - t)$ zu berechnen sind. — Die Differentialgleichung (6) wird durch die Variablen Transformation

$$\varkappa = 1 - t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

in die Form übergeführt:

$$\xi'' + \left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\varkappa-1}\right)\xi' + \left[-(1-\nu) - \frac{1}{\varkappa-1}\right]\frac{\xi}{\varkappa(\varkappa-1)} = 0 \quad \ldots \quad (12),$$

worin mit Strichen Ableitungen nach dem neuen Argument $\varkappa$ angegeben sind. Diese Differentialgleichung kann in ganz analoger Weise integriert werden wie die frühere Form (6), aus der sie hervorgegangen ist. Eine erste Lösung lautet:

$$\xi_1{}^* = (1-\varkappa)\, F\left(\left[\frac{3}{2}+\varrho\right],\left[\frac{3}{2}-\varrho\right],1,\varkappa\right) = (1-\varkappa)\left(1 + \frac{\left(\frac{3}{2}+\varrho\right)\left(\frac{3}{2}-\varrho\right)}{1!\,1}\varkappa + \frac{\left(\frac{3}{2}+\varrho\right)\left(\frac{3}{2}+\varrho+1\right)\left(\frac{3}{2}-\varrho\right)\left(\frac{3}{2}-\varrho+1\right)}{2!\; 1\cdot 2}\varkappa^2 + \ldots\right) \quad \ldots \quad (13).$$

Nach Rücktransformation des Arguments geht diese Lösung in die Form über:

$$\underline{\underline{\xi_1{}^* = t\, F\left(\left[\frac{3}{2}+\varrho\right],\left[\frac{3}{2}-\varrho\right],1,[1-t]\right)}} \quad \ldots\ldots \quad (13).$$

Auch in diesem Fall muß die zweite Lösung durch Grenzübergang ermittelt werden, indem die direkt gegebene Lösung wiederum unendlich groß werdende Koeffizienten aufweist. Die brauchbare Lösung wird durch den Ausdruck gegeben:

$$\underline{\underline{\xi_2{}^*}} = \xi_1{}^* \lg \varkappa + (1-\varkappa)\,\Theta_2{}^*(\eta) = \underline{\underline{\xi_1{}^* \lg(1-t) + t\,\Theta_2{}^*(1-t)}} \quad \ldots \quad (14).$$

worin:

$$\Theta_2{}^*(1-t) = C_1{}^*(1-t) + C_2{}^*(1-t)^2 + \ldots C_\nu{}^*(1-t)^\nu + \ldots$$

$$C_\nu{}^* = \frac{\left(\frac{3}{2}+\varrho\right)\left(\frac{3}{2}-\varrho+1\right)\ldots\left(\frac{3}{2}+\varrho+\nu-1\right)\left(\frac{3}{2}-\varrho\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-\varrho+\nu-1\right)}{\nu!\,\nu!}$$

$$\times \sum_{n=0}^{\nu-1}\left(\frac{1}{\frac{3}{2}+\varrho+n} + \frac{1}{\frac{3}{2}-\varrho+n} - \frac{2}{1+n}\right).$$

Damit sind für die beiden Intervalle von 0 bis ${}^1/_2$ und von ${}^1/_2$ bis 1 je zwei Lösungen ermittelt; an der Stelle $t = {}^1/_2$ stoßen aber die innern Integrale mit den äußern

nicht zusammen. Die stetige Fortsetzung der Lösung ξ_1 über $t = 1/2$ hinaus bis zu $t = 1$ kann ohne weiteres durch lineare Kombination von ξ_2^* und ξ_1^* gebildet werden, indem jede lineare Kombination zweier Integrale wiederum eine der Differenzialgleichung genügende Lösung darstellt. Werden also die Konstanten α und β so bestimmt, daß die Gleichungen befriedigt sind:

$$\xi_1 = \alpha\,\xi_1^* + \beta\,\xi_2^* \quad \text{für } t = 1/2\,, \qquad \xi_1^{\cdot} = \alpha\,\xi_1^{*\cdot} + \beta\,\xi_2^{*\cdot} \quad \text{für } t = 1/2\,,$$

so stellt die zwischen $t = 1/2$ und $t = 1$ bekannte Funktion

$$\alpha\,\xi_1^* + \beta\,\xi_2^*$$

die gesuchte stetige Fortsetzung der Lösung ξ_1 dar.

Um auch eine zweite über den ganzen interessanten Bereich brauchbare Lösung zu besitzen, kann in analoger Weise die Funktion ξ_1^* durch Kombination von ξ_1 und ξ_2 über $t = 1/2$ hinaus bis auf $t = 0$ stetig fortgesetzt werden.

Dieses Vorgehen gestattet nur relativ gut konvergierende Reihen zur Berechnung zu benutzen.

In Abb. 2 ist der Verlauf der Lösungen als Funktionen von t dargestellt, wobei die durch Kombination zweier andern Lösungen ermittelten stetigen Fortsetzungen strichpunktiert eingezeichnet sind. In Abb. 2a sind die ersten Ableitungen aufgetragen. Zahlentafel 1 (s. S. 124) gibt die berechneten Werte wieder[1]).

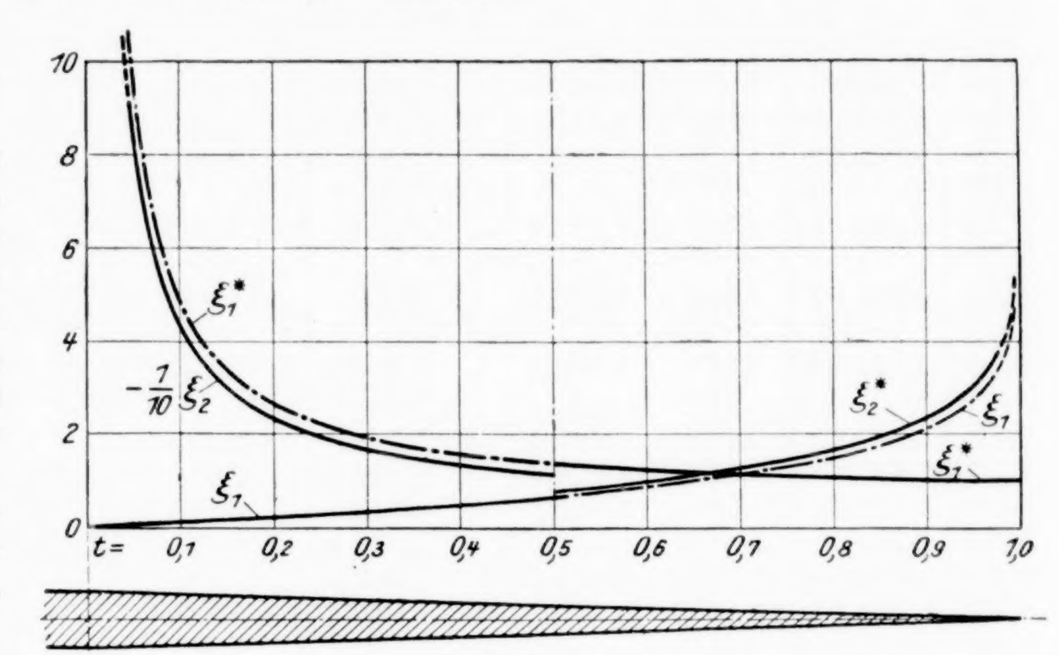


Abb. 2.

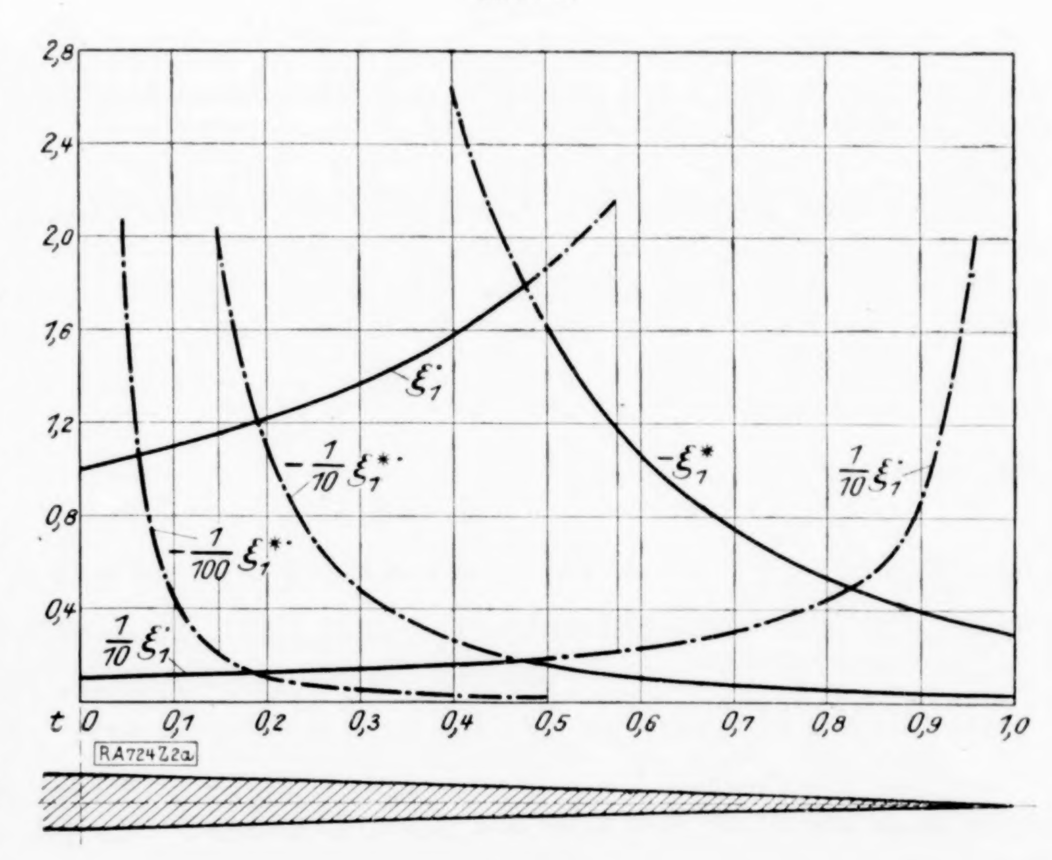


Abb. 2a.

Entsprechend der allgemeinen Gültigkeit der Differentialgleichung (6) sind auch die gefundenen Lösungen für alle achsensymmetrischen, ebenen Belastungsfälle der beliebig großen konischen Scheibe gültig. Die einzige Einschränkung entsteht aus der Anwesenheit der Materialkonstanten ν; der vorliegenden Rechnung wurde der für Stahl und Eisen gültige Wert $\nu = 0 \cdot 3$ zugrunde gelegt. Für andere Metalle oder für nicht metallische Baustoffe, deren Querkontraktionskoeffizient ν von $0 \cdot 3$ verschieden ist, verlieren die berechneten Funktionen ihre Bedeutung.

[1]) Um bei der praktischen Anwendung der Zahlentafel die Rechenarbeit zu vermindern, sind in den folgenden Kolonnen auch

$$\xi^{\cdot} + \nu\,\frac{\xi}{t} \quad \text{und} \quad \frac{\xi}{t} + \nu\,\xi^{\cdot}$$

zahlenmäßig angegeben. Durch Division mit R gehen daraus hervor.

$$\xi' + \nu\,\frac{\xi}{r} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\xi}{r} + \nu\,\xi'.$$

Zahlentafel 1.

t	ξ_1	$\xi_1^{\cdot}$	ξ_1^*	$\xi_1^{*\cdot}$	$\frac{\xi_1}{t} + \nu\,\xi_1^{\cdot}$	$\xi_1^{\cdot} + \frac{\nu\,\xi_1}{t}$	$\frac{\xi_1^*}{t} + \nu\,\xi_1^{*\cdot}$	$\xi_1^{*\cdot} + \nu\frac{\xi_1^*}{t}$
0	0	1	∞	— ∞	1,300	1,300	∞	— ∞
0,05	0,051 12	1,045 5	9,416	−181,13	1,336	1,352	133,98	−124,63
0,10	0,104 64	1,096 3	4,899	— 45,04	1,375	1,410	35,38	— 30,34
0,15	0,160 85	1,152 8	3,402	— 19,87	1,418	1,475	16,72	— 13,07
0,20	0,220 04	1,216 4	2,660	— 11,07	1,465	1,547	9,98	— 7,08
0,25	0,282 63	1,287 9	2,219	— 7,007	1,517	1,627	6,77	— 4,34
0,30	0,349 07	1,371 0	1,929	— 4,805	1,575	1,720	4,99	— 2,876
0,40	0,495 95	1,577 1	1,573 6	— 2,620	1,713	1,949	3,148	— 1,440
0,50	0,667 07	1,866 1	1,367 2	— 1,617	1,894	2,266	2,249	— 0,796
0,60	0,872 4	2,300	1,235 1	— 1,074 1	2,144	2,736	1,736	— 0,456 6
0,70	1,137 1	3,027	1,145 2	— 0,749 4	2,533	3,515	1,411	— 0,258 6
0,75	1,302 6	3,631	1,110 8	— 0,626 9	2,826	4,152	1,292	— 0,181 0
0,80	1,502 0	4,490	1,081 3	— 0,541 1	3,225	5,053	1,189	— 0,135 6
0,85	1,759 4	5,654	1,056 3	— 0,464 0	3,766	6.275	1,103	— 0,091 2
0,90	2,110 8	8,917	1,034 7	— 0,399 8	5,020	9,621	1,030	— 0,054 9
0,95	2,740 3	17,85	1,016 1	— 0,345 8	8,240	18,71	0,965 9	— 0,024 9
1,00	∞	∞	1	— 0,300 0	∞	∞	0,910 0	0

Beachtenswert ist der Umstand, daß ξ_2, und damit auch ξ_1^* für $t = 0$, und ξ_2^* zusammen mit ξ_1 für $t = 1$ unbegrenzt großen Werten zustreben, worauf im Nachfolgenden noch zurück zu kommen sein wird.

3. Das partikuläre Integral der vollständigen Differentialgleichung. Es erscheint zweckmäßig, das partikuläre Integral der vollständigen Integralgleichung direkt als Funktion von r zu ermitteln, ausgehend von der Gleichung in ihrer ursprünglichen Gestalt (2). Nach Einsetzen von (3) lautet diese:

$$(a + b\,r)\,r\,\frac{d^2\xi}{d\,r^2} + (a + 2\,b\,r)\,\frac{d\xi}{d\,r} + \left(\nu\,b - \frac{a + b\,r}{r}\right)\xi = -A\,a\,r^2 - A\,b\,r^3 \quad . \quad (15).$$

Der Ansatz:

$$\xi_0 = k_3\,r^3 + k_2\,r^2 + k_1\,r \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

und somit $\xi_0' = 3\,k_3\,r^2 + 2\,k_2\,r + k_1\,, \qquad \xi_0'' = 6\,k_3\,r + 2\,k_2$

genügt der Differentialgleichung (15), falls über die Konstanten k wie folgt verfügt wird:

$$k_3 = -\frac{A}{11+\nu}; \quad k_2 = -\frac{A\,a}{b}\cdot\frac{3+\nu}{(11+\nu)(5+\nu)}; \quad k_1 = \frac{A\,a^2}{b^2}\cdot\frac{3\,(3+\nu)}{(11+\nu)(5+\nu)(1+\nu)}; \quad A = \frac{(1-\nu^2)\,\mu\,\omega^2}{E} \quad (17).$$

Das partikuläre Integral der vollständigen Differentialgleichung ist also in hohem Maße vom Material, aus dem die Scheibe besteht, von ihren Abmessungen und von der Rotationsgeschwindigkeit abhängig. Auf die Variable t umgeschrieben, nimmt der Ausdruck (16) nach Einsetzen von (17) die Form an:

$$\xi_0 = A\frac{a^3}{b^3}\cdot\frac{t}{(11+\nu)}\left(t^2 - \frac{3+\nu}{5+\nu}\,t - \frac{3\,(3+\nu)}{(5+\nu)(1+\nu)}\right) = \frac{(1-\nu^2)\,\mu\,\omega^2}{(11+\nu)\,E}\cdot R^3\cdot t\left(t^2 - \frac{3+\nu}{5+\nu}\,t - \frac{3\,(3+\nu)}{(5+\nu)(1+\nu)}\right) \quad (18).$$

Für ein gegebenes Scheibenmaterial ist somit ξ_0 proportional mit R^3 und ω^2, weist aber im übrigen einen ein für allemal gegebenen Verlauf auf. Mit anderen Worten: ist ξ_0 für eine bestimmte konische Scheibe und vorgeschriebene Winkelgeschwindigkeit berechnet, so kann durch eine Aenderung der Maßstäbe das ξ_0 für jede andere Scheibe und für jede Tourenzahl unmittelbar erhalten werden.

Für eine Stahlscheibe von $R = 100$ cm, die mit 3000 t/min rotiert, ist ξ_0 in Abb. 3 aufgetragen; die entsprechenden Zahlenwerte sind übrigens in Zahlentafel 2 zusammengestellt.

Zahlentafel 2.

r cm	t	ξ_0 cm	ξ_0'	$\frac{\xi_0}{r} + \nu\, \xi_0'$	$\xi_0' + \nu \frac{\xi_0}{r}$
0	0	0	0,000 436	0,000 567	0,000 567
5	0,05	0,002 224	453	581	586
10	0,10	0,004 521	465	592	601
15	0,15	0,006 861	472	599	610
20	0,20	0,009 237	475	604	614
25	0,25	0,011 612	474	607	613
30	0,30	0,013 967	468	606	607
40	0,40	0,018 531	442	596	581
45	0,45	0,020 691	423		
50	0,50	0,022 741	398	574	534
55	0,55	0,024 647	369		
60	0,60	0,026 418	335	541	467
70	0,70	0,029 386	254	496	380
75	0,75	0,030 550	208	470	330
80	0,80	0,031 456	156	440	274
85	0,85	0,032 085	99 4	407	213
90	0,90	0,032 438	0,000 038 4	372	147
95	0,95	0,032 470	— 0,000 026 6	334	0,000 076
100	1	0,032 170	— 0,000 096 5	0,000 293	0

Das partikuläre Integral ξ_0 liefert zusammen mit den schon gefundenen Lösungen ξ_1 und ξ_1^* der homogenen Differentialgleichung die vollständige Lösung. ξ_0 hat aber auch eine selbständige Bedeutung. ξ_1 wächst für den Rand der Scheibe unbegrenzt, während ξ_1^* für die Scheibenachse unendlich groß wird. Für eine undurchbohrte, bis nach R reichende konische Scheibe müssen somit beide Integrationskonstanten, mit welchen ξ_1 und ξ_1^* zu multiplizieren sind, gleich 0 gesetzt werden, da sonst unbegrenzt große Werte für die radiale Verschiebung auftreten würden, was unzulässig ist. Für eine vollständige konische Scheibe gibt also das partikuläre Integral ξ_0 direkt die radiale Verschiebung an; aus ihr können die auftretenden Materialbeanspruchungen gemäß dem **Hooke**schen Gesetz gefolgert werden. In der Tat genügt der Ausdruck (16) den Grenzforderungen automatisch:

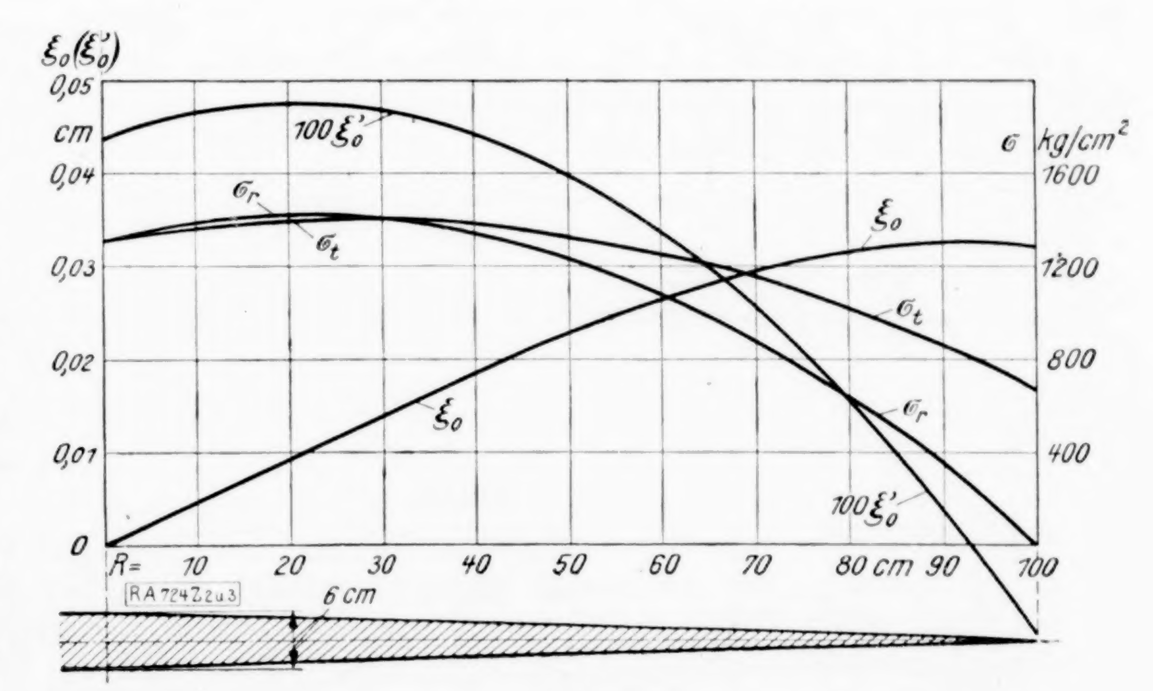


Abb. 3.

$$r = 0 \quad \sigma_r = \sigma_t; \qquad r = R \quad \sigma_r = 0\,,$$

wie durch Einsetzen in die Zusammenhangsformeln:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\xi' + \nu\,\frac{\xi}{r}\right) \text{ und } \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\xi}{r} + \nu\,\xi'\right)$$

nachgewiesen werden kann.

Für die erwähnte vollständige Scheibe sind tangential und radial Spannungen in Abb. 3 ebenfalls eingetragen.

4. Bis zum Außenrand R reichende durchbohrte Scheiben. Obwohl praktisch kaum von Bedeutung, soll dieser Spezialfall kurz besprochen werden. Da der zugespitzte Rand vorhanden ist, muß die Integrationskonstante, mit der ξ_1 behaftet ist, verschwinden, weil ξ_1 für $t = 1$ unbegrenzt groß wird. Da aber die Scheibe durchbohrt ist, fehlt die Stelle $t = 0$, an welcher das zweite partikulare Integral der homogenen Differentialgleichung unendlich groß wird; dessen Konstante muß daher nicht 0 gesetzt werden. In diesem Fall lautet die vollständige Lösung:

$$\xi = \xi_0 + K_2\,\xi_1^*$$

K_2 ist so zu bestimmen, daß die für die Bohrung geltenden Randbedingungen erfüllt sind. Ist der Rand, wie in dem betrachteten Beispiel angenommen, vollkommen frei, so muß dort:

$$\sigma_r = 0 \text{ sein, also } \left([\xi_0 + K_2\,\xi_1^*]' + \nu\,\frac{\xi_0 + K_2\,\xi_1^*}{r}\right)_{r = r_1} = 0$$

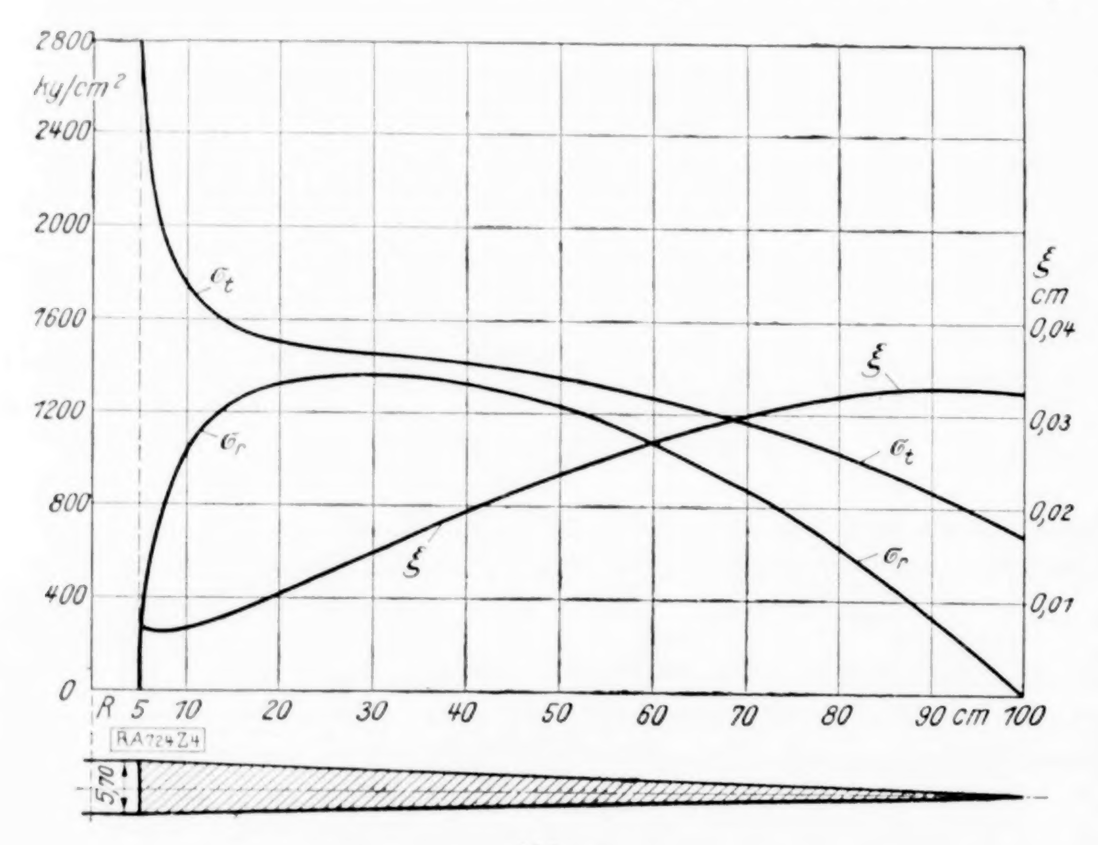


Abb. 4.

In Abb. 4 ist der Deformations- und Beanspruchungszustand einer mit 3000 T./min. rotierenden Scheibe von wiederum 100 cm Radius, aber mit einer Bohrung von 10 cm Durchmesser dargestellt. Die Gegenüberstellung der Abb. 3 und 4 illustriert die bekannte Tatsache, daß eine kleine Bohrung etwa eine Verdoppelung der Umfangsspannung nach sich zieht; die durch die Bohrung verursachte Störung klingt mit wachsendem Radius rasch ab, um schon bei $r = 20$ cm, im vorliegenden Beispiel, ganz unwesentlich zu werden.

Die nämliche Scheibe mit sehr großer Bohrung, 100 cm Durchmesser, ist in Abb. 5 behandelt. Die radiale Spannung tritt nun weit hinter die Tangentialspannung zurück, obwohl der Scheibencharakter immer noch vorherrscht, wie der Vergleich mit der gestrichelt eingetragenen Umfangsspannung eines gleich schnell rotierenden freien Ringes vom betreffenden Radius zeigt.

Abb. 5.

5. Volle Scheibe, die nicht bis zum zugespitzten Außenrand R reicht. Ist der zugespitzte Rand nicht vorhanden, indem die Scheibe innerhalb desselben durch einen konzentrischen Kreiszylinder begrenzt wird, so liegt gewissermaßen der, dem soeben besprochenen entgegengesetzte Fall vor, bei welchem die Deformation gegeben wird durch:

$$\xi = \xi_0 + K_1\,\xi_1\,,$$

da die Konstante vor ξ_1^* Null gesetzt werden muß. Den Bedingungen am Umfange kann durch passende Wahl von K_1 immer entsprochen werden [1]).

Abb. 6 veranschaulicht den Spannungsverlauf und den Deformationszustand für zwei verschiedene Berandungen unter der Voraussetzung, daß der Umfang spannungsfrei sei. Die gegenüber der vollständigen Scheibe eingetretene Verschiebung wirkt sich nicht mehr rein örtlich aus, sondern sie kommt als Entlastung bis in die Mitte der Scheibe zum Ausdruck.

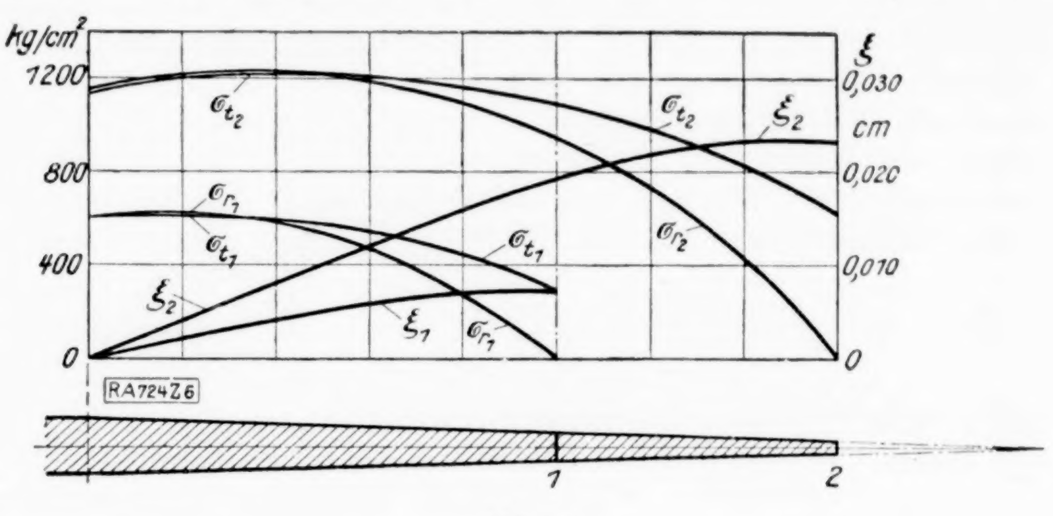


Abb. 6.

In Abb. 6a ist das elastische Verhalten der nämlichen Scheibe von 80 cm Außenradius bei einer Belastung des Umfanges durch eine Radialspannung von 1500 kg/cm² dargestellt. Die berechneten Spannungen schwanken in sehr engen Grenzen: die Radialspannung zwischen 1477 kg/cm² in der Nähe des Umfangs und 1697 kg/cm² etwas innerhalb des mittleren Radiuses, die Tangentialspannung nur zwischen 1532 kg/cm² in der Scheibenmitte und 1670 kg/cm² beim mittleren Radius. Die Extremalwerte bleiben also innerhalb $\pm 7^1/_2$ vH der mittleren Beanspruchungen. — Entsprechend dem ausgeglichenen Spannungszustand ist die radiale Verschiebung nahezu genau proportional dem Radius.

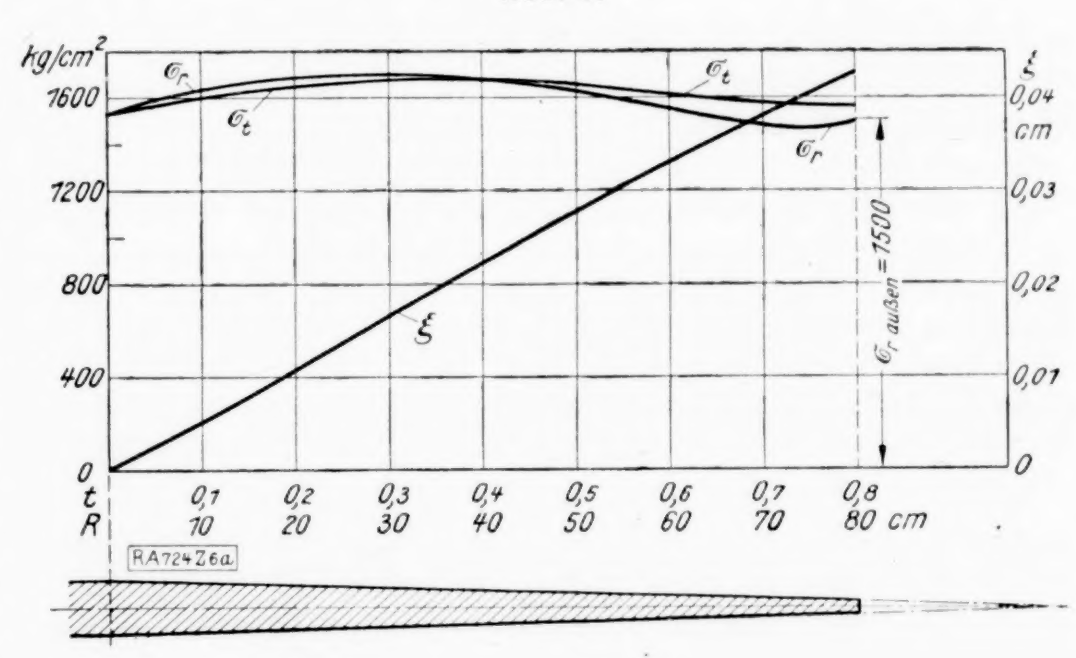


Abb. 6a.

Angesichts dieser Tatsache erscheint die Herstellung von Scheiben gleicher Festigkeit mit ihrem doppelt gekrümmten Profile technisch kaum berechtigt, zumal die an und für sich schon kleinen Spannungsschwankungen in der konischen Scheibe um so belangloser sind, als die Spannungshöchstwerte im mittleren, gut durchgeschmiedeten Scheibenteil auftreten. Eine leichte Entlastung des massigeren zentralen Teils kann nur begrüßt werden; das Gleiche trifft auch für den äußersten Rand der Scheibe zu, im Hinblick auf die dort am meisten zu befürchtende, mögliche zusätzliche Beanspruchung durch Vibrationen. — Für die Bearbeitung in der Werkstatt ist aber die konische Scheibe der komplizierteren Scheibe gleicher Festigkeit weitaus vorzuziehen.

6. Scheibe ohne singuläre Stellen. Die meisten technisch verwendeten Scheiben sind innerhalb des Kreises R, für welchen die Dicke zu 0 wird, begrenzt und sind durchbohrt: die beiden singulären Stellen $t = 0$ und $t = 1$ kommen also gleichzeitig nicht vor, weshalb die vollständige Lösung gegeben ist durch:

$$\xi = \xi_0 + K_1\,\xi_1 + K_2\,\xi_1^*.$$

[1]) Die Funktion ξ_1 befriedigt die Bedingung:

$$t = 0 \qquad \sigma_r = \sigma_t$$

automatisch in gleicher Weise wie ξ_0. In analoger Weise genügt auch ξ_1^* der an der andern singulären Stelle geltenden Forderung:

$$t = 1 \qquad \sigma_r = 0.$$

Die beiden noch zur Verfügung stehenden Integrationskonstanten K_1 und K_2 gestatten die Lösung den Bedingungen beider Ränder anzupassen.

In Abb. 7 ist Beanspruchungs- und Deformationszustand einer Scheibe von 160 cm Durchmesser und 40 cm Bohrung, R wiederum gleich 100 cm, dargestellt, bei Rotation mit

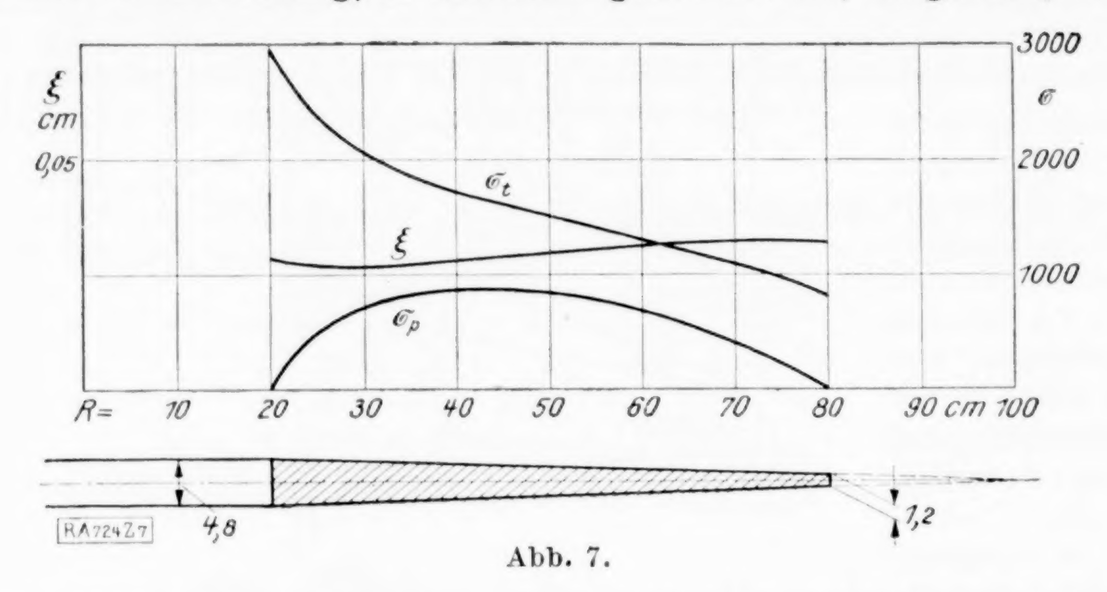


Abb. 7.

3000 T/min. und spannungslosen Rändern. Wie ersichtlich, steigt die Bohrung-Randspannung auf nahezu 3000 kg/cm², während die Höchstspannung in der analogen, nicht durchbohrten Scheibe nur 1215 kg/cm² erreichte (Abb. 6).

In Abb. 8 ist noch ein technisches Beispiel behandelt: Der äußere Rand der Scheibe ist durch eine Radialspannung von 1200 kg/cm² belastet, während die Bohrung mit einem

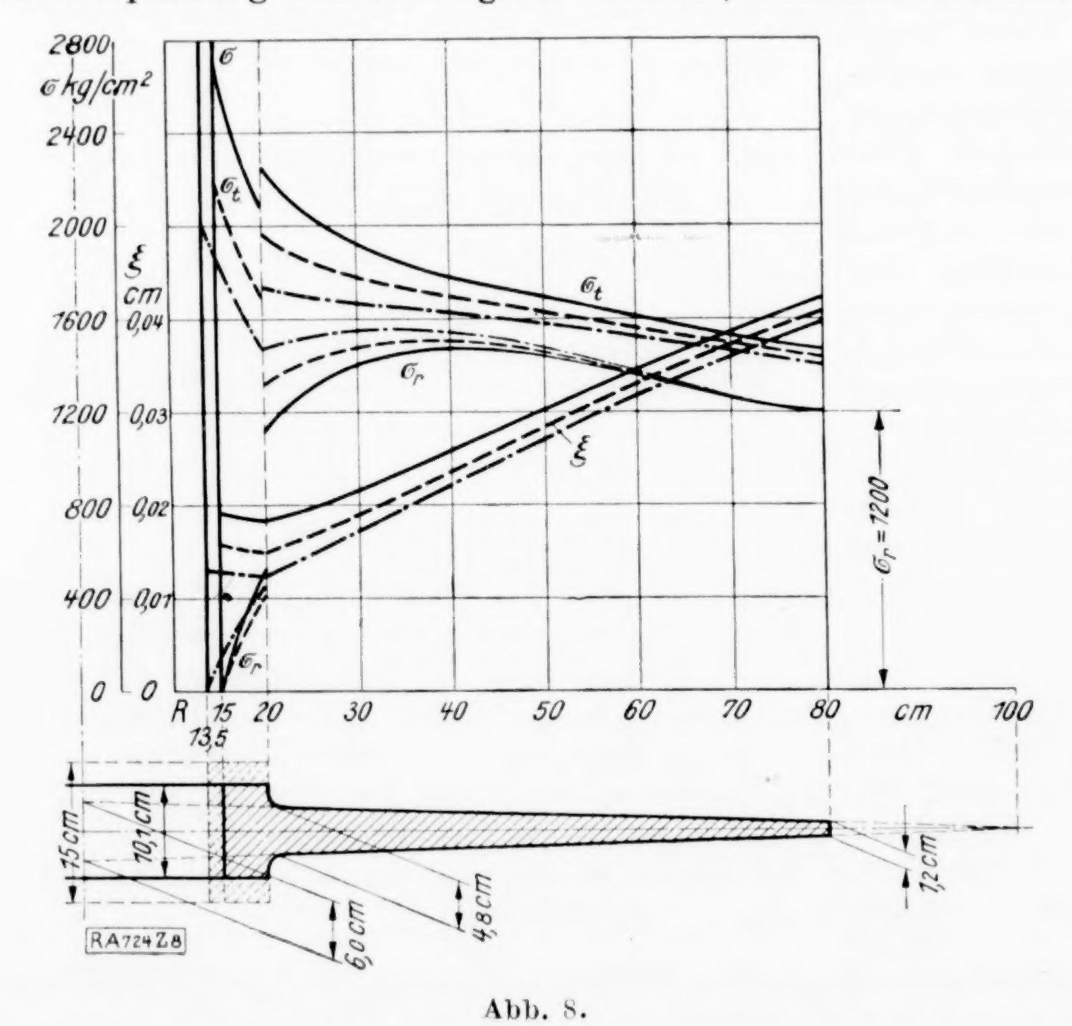


Abb. 8.

Nabenring versehen ist. Die Berechnung ist für drei verschieden starke Naben durchgeführt. Die günstigste Spannungsverteilung tritt bei der stärksten Nabe ein. — Ein noch vollkommenerer Ausgleich der Beanspruchungen wäre ohne weiteres durch eine proportionale Verminderung der Scheiben-Dicke h etwa im Verhältnis 5 : 4 erreichbar, bei einer entsprechenden Steigerung der äußeren Randspannung auf 1500 kg/cm²; die gesteigerte Vibrationsgefahr läßt aber den Nutzen eines solchen Vorgehens in vielen Fällen fraglich erscheinen. — Dieses Beispiel mag genügen um den Beweis zu erbringen, daß auch bei vorhandener Bohrung die konische Scheibe mit den besten Scheibenkonstruktionen verschiedenen Profils in Wettbewerb treten kann. 724

Die geführten Schwerewellen an der Grenze zweier fließenden Mittel.

Von **KARL ULLER** in Gießen.

1. Kurze Kritik der Methode des Standwechsels. Wenn die mathematische Darstellung der Sinuswelle gesucht wird, die beiderseits der Grenze U zweier Flüssigkeiten mit den Dichten D_1 und D_2 im Schwerefelde sich fortpflanzt, so geht die Methode des Standwechsels von Stationarität aus so vor, daß sie ein fiktiv stationäres, geschlängeltes Geschwindigkeitsfeld in beiden Mitteln sucht und dieses sich dann mit der konstanten Geschwindigkeit u längs der Horizontalen bewegt denkt. Für die zweidimensionalen Stromfunktionen hat man gefunden

$$\psi_1 = -v_{01}\{z - \beta e^{kz} \cos kx\}; \qquad \psi_2 = -v_{02}\{z - \beta e^{-kz} \cos kx\} \quad . \quad . \quad (1);$$

v_{01} und v_{02} sind die konstanten Geschwindigkeiten im Unendlichen.

In $z \cong 0$ liefert $\psi_1 = \psi_2 = 0$ als Profil der gewellten Grenzfläche $\zeta = \beta \cos kx$. Die noch beliebige Periode $2\pi/k$ der Schlängelung, die präsumptive Wellenlänge, liefert die Druckgleichung mit der Grenzbedingung $P_2 = P_1$ in der Form

$$D_1 v_{01}^2 + D_2 v_{02}^2 = (D_2 - D_1) g/k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Wir können nun leicht beweisen, daß diese Darstellung nur widerspruchslos ist, wenn $v_{01} = v_{02}$ ist. Das verlangt nämlich die Stetigkeit der Normalkomponente $v_z = \partial\psi/\partial x$. Dasselbe Ergebnis folgt mit (1) auch aus derselben nur anders gefaßten Grenzbedingung $\psi_1 = \psi_2 = c$. Denn für $z - \beta \cos kx =$ konst. für beide Mittel ergibt sich notwendig $v_{01} = v_{02}$. Erst nach der Gleichsetzung kann man $c = 0$ setzen. Indem man das aber von vornherein tat, konnte sich ein etwaiger Einfluß der Grenzbedingungen auf die Faktoren v_{01} und v_{02} nicht geltend machen. Damit ist bewiesen, daß es eine unmöglich zu erfüllende Forderung ist, ein fiktiv stationäres Ausgangsfeld zu finden, wenn beide Mittel gleiten. Andererseits sehen wir aber auch, daß kein Widerspruch erhoben werden kann, wenn nur ein Mittel vorhanden ist, das an den leeren Raum angrenzt.

Eine ausführliche und eindringende Kritik des genannten Verfahrens und der auf ihm beruhenden Helmholtz-Lambschen Formeln wird später veröffentlicht.

2. Die wahre Lösungsmethode. Diese wie jede andere Wellenaufgabe ist auf eine ganz andere Weise annahmenfrei darzustellen[1]). Man muß nämlich, allgemein gesprochen, von vornherein aus den Grundgleichungen des vorgelegten Feldes die Gleichungen der möglichen Wellen aufsuchen, eine Aufgabe jedoch, die man bisher nicht lösen konnte, nicht etwa wegen mathematischer Schwierigkeiten, sondern wegen Unkenntnis eines entscheidenden Wellenprinzips. Eine an der Unstetigkeitsfläche zweier Mittel entlang laufende Welle, eine geführte Welle, setzt sich nun aus je einem Wellenstück solcher Wellen in jedem Mittel zusammen. Die U-Fläche verbindet beide Flanken dauernd miteinander und führt diese »Zweimittelwelle« wie ich sie seit langem nenne. Außer den Grenzbedingungen des Feldes hat man also noch die Wellenkohärenz-Bedingung einzuführen. Denn es gilt der allen physikalischen Theorien vorangehende, wellenkinematische Satz: Von welchem Standort auch immer wir die Wellen betrachten, stets haben alle an einer U-Fläche zusammenhängenden Wellen gleiche Spurgeschwindigkeit längs der U-Fläche. So ist unsere Wellenaufgabe prinzipiell immer lösbar.

3. Das Gleichungssystem der Welle in der reinen Hydro- und Aerodynamik, kurz, Fluidik genannt. Wir nehmen unseren Standort in einem Bezugsystem, in welchem der stationäre Teil des äußeren Kraftfeldes ruht. Bei vielen Bewegungen von Flüssigkeiten und Gasen weckt ein Kraftfeld mäßige Verzerrungen und benachbarte Geschwindigkeitsunterschiede des Mittels, so daß man dies in erster Annäherung als dichtebeständig und frei von innerer Reibung ansehen darf. Wir beschäftigen uns im folgenden mit dem Geschwindigkeitsfelde ($\mathfrak{V}$) in solchen verzerrungsfreien, trägen und homogenen Mitteln von der unveränderlichen Massendichte D, die im Innern nur mit dem isotropen Druck P gegenwirken; in Grenzflächen lassen wir Grenzflächenspannungen zu. Das äußere Kraftfeld setze sich zusammen aus einem stationären Kraftfeld ($\mathfrak{G} = \text{grad}\, \Pi$), wie die Schwere, und aus einem veränderlichen ($\mathfrak{F}$), das aber auf einen Bezirk beschränkt sei; letzteres

[1]) K. Uller, Zur Theorie der Wogen. Verhdl. d. D. Phys. Ges. (3), Bd. 6 (1925), Seite 33 bis 35, Nr. 2.

erzeugt in seinem Gebiet die Wellen. Bekümmern wir uns, wie im folgenden, zunächst nur um die Wellen außerhalb ihres Ursprungs, dann bleibt das $\mathfrak{F}$-feld außer Betracht. Wir wollen aber von diesem wellenerregenden Felde voraussetzen, daß es keine Drehungen der Teilchen bewirkt. Dann können unter der Wirkung von $\mathfrak{G}$ auch keine entstehen, d. h. es ist zu allen Zeiten rot $\mathfrak{V} = 0$. Die Dichtebeständigkeit verlangt dazu div $\mathfrak{V} = 0$. Aus beiden Voraussetzungen über die Natur des Flüssigen und die Art der Bewegungen folgt

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Omega = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(I)},$$

wenn Ω das Geschwindigkeitspotential dieser Bewegungen bezeichnet. Es läßt sich zeigen, daß dies auch die »Wellengleichung« für unser idealflüssiges Mittel ist, obgleich in ihr Ableitungen nach der Zeit nicht auftreten und nicht einmal die Dichte, dieser einzige Parameter der idealen Flüssigkeit, eine Rolle spielt. Die Wellengleichung in einer unzähen, sonst beliebigen Flüssigkeit lautet für kleine Verdichtungen und Verdünnungen $\ddot{\Omega} - \Gamma \operatorname{div} \operatorname{grad} \Omega = 0$. Wenn nun der Widerstand $\Gamma = d\,P/d\,D$ unendlich groß ist, verschwindet $\ddot{\Omega}/\Gamma$ und die genannte Wellengleichung geht dann zur Grenze (I) über. In unseren idealisierten Mitteln unterliegen also stationäre und nichtstationäre Bewegungen beide ein und derselben Differentialgleichung und zwar einer parameterfreien. Im Falle von Wellen in unseren Mitteln erweisen sich diese als Grenzfälle von Verdichtungs-Verdünnungswellen in einem Mittel von unendlich großer Druckwiderständigkeit.

Zwischen dem Druck und dem Geschwindigkeitspotential herrscht die aus dem Grundgesetz der Mechanik gebürtige Beziehung

$$P/D = \Pi - \frac{\partial \Omega}{\partial t} - \frac{1}{2} \operatorname{grad}^2 \Omega + \text{konst.}$$

die wir aber auch schreiben können

$$P/D = \Pi - \frac{d\,\Omega}{d\,t} + \frac{1}{2} \operatorname{grad}^2 \Omega + \text{konst.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(II)},$$

die hydraulische Energieströmung mißt $\mathfrak{R} = P \cdot \mathfrak{V}$ . . . . (III).

Ist das Geschwindigkeitsfeld zeitlich ein rein elliptisches und das quadratische Glied in (II) klein gegen die beiden ersteren, dann ist die Bahn[1]) eines Teilchens im wesentlichen ebenfalls eine Ellipse mit einer Umlaufszeit T. Demnach erhalten wir, wenn wir den zeitlichen Mittelwert von P einmal lokal (l) und einmal substantiell (s) bilden

$$\overline{P}_l \simeq P_0 - \frac{D}{2\,T} \int d\,t \operatorname{grad}^2 \Omega\,; \qquad \overline{P}_s \simeq P_0 + \frac{D}{2\,T} \int d\,t \operatorname{grad}^2 \Omega \quad . \; . \; . \quad \text{(IV)},$$

worin $P_0 = D\,\Pi_0$ den statischen Druck bezeichnet. Lokal haben wir einen Unterdruck, substantiell — etwa in einer winzigen Luftblase im Wasser oder in einem Regentröpfchen in Luft — einen gleich großen Ueberdruck, denn die beiden Integrale sind wesentlich gleichwertig.

Aus der Grundgleichung (I), die einer Ueberlagerung von beliebig vielen, sich durchkreuzenden Wellen beliebig verschiedener Schwankungsformen eine Bedingung aufdrückt, schälen wir nun das Gleichungssystem einer Welle heraus, und zwar zunächst einmal einer solchen von elementarer Schwankungsform. Das ist, wenn man nicht in erster Annäherung mit der idealisierten Welle, der Planwelle arbeitet, nur möglich bei Anwendung meines Interferenz-Prinzipes[2]). Es sei jetzt insbesondere Ω das Wellenpotential einer Welle im Fließenden. Für eine Welle von elementarer Zeitform hat es die Gestalt

$$\Omega(\mathfrak{r}, t) = (\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}) + {}^1\!/_2 \left\{ \omega \cdot e^{i(\nu t - \Phi)} + \omega^* \cdot e^{-i(\nu^* t - \Phi^*)} \right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{r}$ den Topographen, t die Zeit, $\mathfrak{v}$ die konstante Flußgeschwindigkeit, $\nu = \nu' + i\,\nu''$ die von uns beobachtete Frequenz ν' und die positive oder negative Dämpfung ν'', sowie ein angehängtes Sternchen den konjugiert komplexen Ausdruck[3]). Führen wir die Wellenform (1) in die Grundgleichung (I) ein, so liefert das Interferenz-Prinzip für die Gradienten $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ der Phasenflächen $\Phi' =$ konst. und der Amplitudenflächen $\Phi'' =$ konst. in der Verbindung $\mathfrak{w}' + i\,\mathfrak{w}'' = \mathfrak{w}$

$$\mathfrak{w}^2 + i \operatorname{div} \mathfrak{w} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2), \qquad \omega = \text{konst.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3);$$

es hat $\mathfrak{w}$ die Maßzahl einer reziproken Länge und ω die des Produktes von Geschwindigkeit und Länge. Die Gl. (2) und (3) bilden das Gleichungssystem der Welle (1). In

[1]) K. Uller, Ueber Flüssigkeitsbewegung bei vibratorischer Erregung. Verhdl. d. D. Phys. Ges. Bd. 16 (1914), S. 813.

[2]) K. Uller, Das Interferenz-Prinzip, Phys. Zeitschr. Bd. 18 (1917), S. 101.

[3]) K. Uller, Grundlegung der Wellenkinematik usw. I, Phys. Zeitschr. Bd. 17 (1916), S. 168.

ihm ist zum Ausdruck gebracht, daß die Wellenflächen ihre eigenen, allgemeinen Gesetzmäßigkeiten haben, daß demzufolge sich kreuzende Wellen sich weder vereinigen noch zerlegen lassen. Nun erst ist in dem zunächst noch unbestimmten Ausdruck (1) $\mathfrak{w}$ das Wellennormalenpaar und ω der Wellenskalar. Aus ersterem berechnet sich die Wellenlänge zu $2\pi/|\mathfrak{w}'|$ und die Phasengeschwindigkeit zu $\nu'/|\mathfrak{w}'|$. Die Welle der Fluidik ist ein Musterbeispiel für meine Behauptung und meinen Nachweis, daß die Geschwindigkeit einer Welle in einem Mittel irgendwelcher Art durchaus keine allgemeine und vorgegebene, aus der Wellengleichung ohne weiteres zu entnehmende Größe ist, und daß auch in einem konservativen Mittel Verlöschungsflächen $\Phi'' =$ konst. existieren können, allgemein und nicht erst ad hoc zur Konstruktion eines Sonderfalles. Geschwindigkeit und Amplitudenabfall ergeben sich erst aus den Gesetzmäßigkeiten der Wellenflächen-Systeme und aus den Anfangs- und Grenzbedingungen der jeweiligen Wellenaufgabe; Gl. (2) liefert nur erst die Abhängigkeit vom Ort. Die genannte Beziehung hat auf anderen Gebieten der Physik rechtsseitig statt null den Wellenparameter a, in welchem die Eigenschaften des Mittels und die Formkonstanten der Welle zusammen treten. Mit dieser Bewandtnis hängt zusammen, daß in einem einzigen Mittel und in der Ferne wesentlich $\mathfrak{w}^2 = a$ wird, also unabhängig von den Bedingungen der Wellenaufgabe. Das hat zu der Meinung verleitet, daß diese letztgenannte Beziehung die Geschwindigkeit überhaupt liefere. In Wahrheit aber ist in einem Mittel jede Fortpflanzungsgeschwindigkeit möglich je nach der Form der Welle; sie ist keineswegs von konstantem Betrage[1]. Kein Mittel hat eine ihm eigene Wellengeschwindigkeit für alle Wellen. Die Welle in einem ideal flüssigen Mittel unterscheidet sich von denen in anderen Mitteln lediglich durch die Größe a, die hier den Wert null hat.

An (2) erkennen wir, daß $\mathfrak{w}$ stets komplex ausfällt. Selbst bei ungedämpften Sinuswellen ($\nu'' = 0$) und trotz der Unmöglichkeit einer Energieverschluckung, existieren also tatsächlich neben den Phasenflächen (Φ') auch Verlöschungsflächen (Φ''). Verlöschung und Verschluckung sind eben zweierlei. Wir konnten das gleiche schon bei Verzerrungswellen in festen, schweren Mitteln nachweisen[2].

Mit (3) nimmt nun das Geschwindigkeitsfeld der Welle die Form an

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{V}(\mathfrak{r}, t) &= \mathfrak{v} - {}^1/_2 \{i\,\omega\,\mathfrak{w} \cdot e^{i(\nu t - \Phi)} + \ldots\} \\ &= \mathfrak{v} + e^{-(\nu'' t - \Phi'')} \{(\omega\,\mathfrak{w})'' \cos(\nu' t - \Phi') + (\omega\,\mathfrak{w})' \sin(\nu' t - \Phi')\}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (4).$$

Bei **ungedämpfter Frequenzerregung** ($\nu'' = 0$) wird insbesondere

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{v} + e^{\Phi''} \{(\omega\,\mathfrak{w})'' \cos(\nu' t - \Phi') + (\omega\,\mathfrak{w})' \sin(\nu' t - \Phi')\} \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

und bei **Exponentialerregung** ($\nu' = 0$)

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{v} + e^{-(\nu'' t - \Phi'')} \{(\omega\,\mathfrak{w})'' \cos \Phi' - (\omega\,\mathfrak{w})' \sin \Phi'\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4'').$$

Aus (II) ergibt sich mit Rücksicht auf (2) und (3) für den lokalen Unterdruck in unserer Welle, indem wir noch ω reell nehmen

$$\left.\begin{aligned}\frac{P - P_0}{D} = &- \frac{\omega}{2} \{i\,\nu \cdot e^{i(\nu t - \Phi)} - i\,\nu^* \cdot e^{-i(\nu^* t - \Phi^*)}\} \\ &- \frac{\omega^2}{8} \{i \operatorname{div} \mathfrak{w} \cdot e^{i2(\nu t - \Phi)} - i \operatorname{div} \mathfrak{w}^* \cdot e^{-i2(\nu^* t - \Phi^*)}\} \\ &- \frac{\omega^2}{4} (\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}^*) \cdot e^{i(\nu - \nu^*) t - i(\Phi - \Phi^*)}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (5).$$

Erscheint in den Manometer-Aufzeichnungen für eine durchlaufende Sinuswelle der Unterdruck doppelperiodisch, so ist es ein Anzeichen, daß die Welle elliptisch schwingt und keine Planwelle ist. Das letzte Glied in (5) ist bei ungedämpfter Welle ($\nu = \nu^*$) gleich dem zeitlichen Mittelwert des Unterdruckes.

Wo in einer Welle die Wellenflächen als gleichabständige Ebenen gelten können, verschwindet $\operatorname{div} \mathfrak{w}$; wir reden dann von einem Planwellen-Gebiet ($\mathfrak{w} =$ konst.) mit $\Phi' = (\mathfrak{w}'\mathfrak{r})$; $\Phi'' = (\mathfrak{w}''\mathfrak{r})$. Gemäß (2) ist in einem solchen

$$\mathfrak{w}^2 = 0, \text{ also } \mathfrak{w}'^2 = \mathfrak{w}''^2; \ (\mathfrak{w}'\mathfrak{w}'') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2').$$

---

[1] K. Uller, Front- und Rückengeschwindigkeiten von freien Temperatur- und Diffusionswellen usw. Oberhessische Berichte, Neue Folge, Naturw. Abt. Bd. 10 (1925).

[2] K. Uller, Die Verzerrungswellen in schweren Mitteln, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 6 (1926) S. 106 bis 111.

Die $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ stehen dann senkrecht zueinander und sind von gleichem Betrage; die Größe desselben aber bleibt zunächst offen. Diese Lage des Wellennormalenpaares zueinander ist fast gleich derjenigen der Welle im zweiten Mittel bei optischer oder akustischer Totalreflexion unter gegebenem Welleneinfall, nur daß dort der Unterschied der zunächst unbestimmten Beträge der $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ von null verschieden ist[1]). Was die Polarisation des Geschwindigkeitsfeldes bei ungedämpfter Frequenzerregung anbelangt, so schwingt in der Planwelle (2') das Feld relativ zur Flußgeschwindigkeit kreisförmig, wobei $[\mathfrak{w}''\mathfrak{w}']$ Achse der Drehung ist. Ferner sind dann die Bahnen der Teilchen Kreise[2]) mit dem Bahnradius $|\omega| \cdot |\mathfrak{w}'| : \nu'$. In diesem Falle erfährt selbst eine zusammendrückbare Flüssigkeit keine Dichteschwankung. *Je größer in der Welle die Abweichung von der Kreisförmigkeit, um so größer die Abweichung vom Planwellen-Charakter und der Dichtebeständigkeit in einer nicht idealen Flüssigkeit.* Von den schematischen Bezeichnungen als Längswelle und Querwelle paßt keine auf unsere Welle, die auch keine einfache ist, weil $[\mathfrak{w}''\mathfrak{w}'] \neq 0$. Bei Exponentialerregung behält $\mathfrak{V}$ eine bestimmte Richtung bei. Schließlich erkennen wir noch an (4), daß in jeder wirbelfreien Welle die *Amplituden* abhängig sind von der Lagerung der Wellenflächen, nämlich von $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$, also von der Wellenlänge.

Selbstverständlich ist im Zustand (1) die ursprüngliche Stationarität des Flusses aufgehoben. Die Bahnen der Teilchen sind nicht mehr parallele Geraden, sondern Schlängelungen oder Spitzen- oder Schlingenzüge, je nach dem Stärkeverhältnis des veränderlichen Anteiles $|\omega \mathfrak{w}|$ zu der Flußgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Infolgedessen ist die Druckgleichung (II) nicht zerlegbar in einen stationären und nichtstationären Anteil. Für unsere Welle (1) nimmt sie, wenn wir quadratische Glieder wie $e^{i\,2(\nu t - \Phi)}$ vernachlässigen, die Form an

$$\frac{P}{D} \simeq \Pi - \frac{\partial \Omega}{\partial t} - (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \Omega) + \frac{\mathfrak{v}^2}{2} + \text{konst.} \qquad (6).$$

Das Druckfeld der Welle im Fließenden ist schon in erster Annäherung verschieden von dem der Welle im Ruhenden.

An einer Unstetigkeitsfläche U mit der Normale $\mathfrak{f}$, gerichtet von (1) nach (2), müssen bei unbehinderter Gleitung als Grenzbedingungen für die Flüssigkeiten gelten: 1. Stetigkeit der Normalverrückungen; 2. Unstetigkeit der Normalspannungen entgegengesetzt gleich der Grenzflächenspannung in normaler Richtung, was zur Folge hat, daß dann die Normalkomponente der Energieströmung unstetig ausfällt. Freie Oberfläche und starrer Boden bilden zwei Grenzfälle mit nur je einer Grenzbedingung; an ersterer: Druck konstant, an letzterer: Normalverrückung null. Der von den Grenzflächenspannungen ausgeübte Kapillardruck ist dem Betrage nach proportional der mittleren Krümmung. Für den entgegengesetzt gleichen Flüssigkeitsdruck haben wir daher an U

$$P_2 - P_1 = - c_{12} \operatorname{div} \mathfrak{f} \qquad (7);$$

c_{12} ist die Kapillaritätskonstante.

Außer den Grenzbedingungen haben wir gemäß der Darlegung im 2. Abschnitt auch die von ihnen unabhängigen Wellenkohärenz-Bedingungen zu erfüllen. Für je zwei zusammenhängende Wellen (α) und (β), mögen sie auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von U sich befinden, muß demgemäß gelten[3])

$$\mathfrak{w}_{\alpha t} = \mathfrak{w}_{\beta t} \qquad (8).$$

worin der Zeiger t die Tangentialkomponente anzeigt.

In einem stationären unstetigen Felde kann man die Grenzbedingungen nach Belieben lokal oder substantiell erfüllen, weil die U-Fläche unverändert bleibt. Anders in einem veränderlichen Felde. In jedem Raumpunkt, durch den zur Zeit t die bewegliche U-Fläche geht, erleiden die *Euler*schen Feldwerte im allgemeinen einen Sprung durch den Uebertritt des anderen Mittels. An keiner Stelle des Feldes darf aber der zeitliche Anstieg einer Größe unendlich groß sein. Dem kann man nur dadurch entgehen, daß man in der mathematischen Darstellung die Bewegung der Teilchen mitmacht, d. h. diejenigen Feldwerte angibt, die ein Teilchen auf seiner Wanderung antrifft; auf wie lange, das werden wir gleich besprechen. Diese substantiellen, an ein Teilchen gebundenen Werte reihen sich in der Zeit stets stetig aneinander. In der *Euler*schen Darstellung,

[1]) K. Uller, Eine Wellenstudie, Elster-Geitel-Festschrift 1915, S. 521.

[2]) K. Uller, Ueber Flüssigkeitsbewegung bei vibratorischer Erregung, a. a. O.

[3]) K. Uller, Der Doppler-Effekt an bewegter Unstetigkeitsfläche. Zeitschrift f. Physik 4, 109, 1921.

die unseren Gleichungen zugrunde liegt, wählen wir einen Ort $\mathfrak{r}$ der Grenzfläche zur Zeit t, suchen aber aus den Teilchen diejenigen beiden aus — je eines in (1) bezw. in (2) —, die auf ihrer Bahn zur Zeit t im Ort $\mathfrak{r}$ sich begegnen, und erfüllen die Grenzbedingungen mit Werten, die mit diesen Teilchen verbunden sind, den substantiellen (s). Da wir aber in der Felddarstellung nicht die Geschichte der beiden Teilchen, die im Punkt $\mathfrak{r}$ sich begegnen, ins Auge fassen dürfen, so müssen wir die beiden bereits ins Auge gefaßten im nächsten Augenblick entlassen. Somit sind uns die Feldwerte (s) nicht wie nach Lagrange reine Funktionen der Zeit und des Anfangsortes, sondern des Raumes $(\mathfrak{r})$ und der Zeit (t), welch beide Variabeln hier auch bei substantiellen Grenzbedingungen voneinander unabhängig zu betrachten sind. Insbesondere sind uns also die Wellenflächen $\Phi = \text{konst}$. wie früher reine Ortsfunktionen. An der U-Fläche gilt daher $\Phi_1(\mathfrak{r}) - \Phi_2(\mathfrak{r}) = \text{konst.}$, während $\Phi_1(t) - \Phi_2(t)$ eine Funktion der Zeit ist, wenn $\mathfrak{v}_1 \neq \mathfrak{v}_2$.

Nunmehr ist unsere Aufgabe, $\mathfrak{V}_s$ darzustellen. Es ist zunächst

$$\mathfrak{V}_s - \mathfrak{V}_0 = \int_{t_0}^{t} d\,t' \left\{ \frac{\partial}{\partial t'} (\mathfrak{V}_{\mathfrak{r}'} + (\mathfrak{V}\nabla)_{t'} \mathfrak{V} \right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9).$$

Der Ort $\mathfrak{r}'$, den das Teilchen zur Zeit t' erreicht, ist bei kleinem $|\omega\,\mathfrak{w}|$ angenähert

$$\mathfrak{r}' \simeq \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{v}\,(t' - t_0) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (10),$$

so daß $\Phi' = \Phi(t') = (\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}') \simeq (\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}_0) + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})\,(t' - t_0)$, indem in der Planwelle $\mathfrak{w}_s = \mathfrak{w}$ ist. Nunmehr läßt sich bei Vernachlässigung des quadratischen Gliedes $(\mathfrak{V} - \mathfrak{v}, \nabla)\,\mathfrak{V}$ die substantielle Bahnintegration durchführen. Wir erhalten, da $\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{V}(\mathfrak{r}_0; t_0)$ ist,

$$\mathfrak{V}_s = \mathfrak{v} - {}^1/_2\,\{i\,\omega\,\mathfrak{w}\cdot e^{i\,(\nu t - \Phi(\mathfrak{r}))} + \ldots\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11).$$

Das sind also angenähert diejenigen ausgesuchten $\mathfrak{V}$-Werte, welche das ins Auge gefaßte materielle Teilchen bei seiner Bewegung in geschlängelter oder verschlungener Bahn antrifft. Das Ergebnis (11) war zu erwarten. Es zeigt, daß unsere Ueberlegungen richtig sind. Entsprechend finden wir

$$\left(\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,t}\right)_s \simeq {}^1/_2\,\{i\,\nu\,\omega\cdot e^{i\,(\nu t - \Phi(\mathfrak{r}))} + \ldots\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

und bei dem stationären Felde Π

$$\Pi_s - \Pi_0 = \int_{t_0}^{t} d\,t' \left\{ \text{grad}\;\Pi\;(t'),\; \mathfrak{v} - {}^1/_2\,\{i\,\omega\,\mathfrak{w}\cdot e^{i\,(\nu t' - \Phi(\mathfrak{r}))} + \ldots\} \right\},$$

somit wenn $\text{grad}\;\Pi\,(t') = \text{konst.}$,

$$\Pi_s - \Pi_0 \simeq (\mathfrak{v}\;\text{grad}\;\Pi)\,(t - t_0) - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega\,(\mathfrak{w}\;\text{grad}\;\Pi)}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})} \cdot e^{i\,(\nu t' - \Phi')} + \ldots \right\}_{t_0}^{t},$$

so daß

$$\Pi_s \simeq (\mathfrak{v}\;\text{grad}\;\Pi)\,t - {}^1/_2 \left\{ \frac{\omega\,(\mathfrak{w}\;\text{grad}\;\Pi)}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})} \cdot e^{i\,(\nu t - \Phi(\mathfrak{r}))} + \ldots \right\} \quad . \; . \; . \quad (13).$$

Das sind also in einem homogenen Π-Felde angenähert diejenigen Π-Werte, die das Teilchen auf seiner Wanderung antrifft; ein anderes Teilchen trifft andere Werte an. Die P_s-Werte setzen sich nach (6) additiv zusammen, so daß

$$\frac{P_s}{D} \simeq \Pi_s - {}^1/_2 \left\{ i\,\omega\,\{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})\}\; e^{i\,(\nu t - \Phi)} + \ldots \right\} - \frac{\mathfrak{v}^2}{2} + \text{konst.} \quad . \; . \; . \; . \quad (14).$$

Wir können aber auch P_s/D nach der Anleitung (9) erhalten, indem wir von (6) in der Form

$$\frac{P}{D} \simeq \Pi - {}^1/_2 \left\{ i\,\omega\,\{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{w})\}\; e^{i\,(\nu t - \Phi)} + \ldots \right\} - \frac{\mathfrak{v}^2}{2} + \text{konst.} \quad . \; . \; . \; . \quad (6')$$

ausgehen.

Wir brauchen schließlich die Form der gewellten U-Fläche; wir beziehen sie auf die ungewellte. Ein Punkt der gewellten Grenzfläche zur Zeit t_0 hat den Abstand ζ_0 und verschiebt sich mit ihr nach ζ, wobei

$$\zeta = \int d\,t\,(\mathfrak{V}\,\mathfrak{f}) \simeq \int d\,t\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{f}) - \frac{1}{2} \int d\,t\,\{i\,\omega\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{f})\cdot e^{i\,(\nu t - \Phi(\bar{\mathfrak{r}}_t)} + \ldots\}_{\bar{\mathfrak{r}}_{t_0}}.$$

Dabei ist zu beachten, daß, wenn die ungewellte Fläche als ganzes eine Normalkomponente der Geschwindigkeit hat, nämlich infolge einer Normalkomponente $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{f})$ der Flußgeschwindigkeiten, daß dann ein Punkt der ungewellten Fläche von

$$\bar{\mathfrak{r}}_{t_0} \text{ nach } \bar{\mathfrak{r}}_{t_0} + (\mathfrak{v}\,\mathfrak{f})\,\mathfrak{f}\,(t - t_0) = \bar{\mathfrak{r}}_t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

gelangt. Führen wir nun die Zeitintegration bei konstantem $\bar{\mathfrak{r}}_{t0}$ durch, so bekommen wir bei merklich konstanter Flächennormale $\mathfrak{f}$ der ungewellten Fläche, wenn wir noch $\bar{\mathfrak{r}}_t$ einfach gleich $\mathfrak{r}$ schreiben, als bewegliche Grenzfläche zur Zeit t

$$\zeta - \zeta_0 \simeq (\mathfrak{v}\mathfrak{f})(t - t_0) - \frac{1}{2}\left\{\frac{\omega\,(\mathfrak{w}\mathfrak{f})}{\nu - (\mathfrak{v}\mathfrak{f})(\mathfrak{w}\mathfrak{f})}\cdot e^{i(\nu t - \Phi(\mathfrak{r}))} + \ldots\right\}_{t_0}^{t} \quad . \quad . \quad . \quad (16),$$

bezogen auf die ungewellte Fläche zur Zeit t_0.

Etwas anderes ist die Bahnprojektion $z - z_0$ eines Teilchens, geworfen auf die Linie $[\mathfrak{f}, \mathfrak{r} - \mathfrak{r}_0] = 0$. Wir haben

$$z - z_0 = \int_{t_0}^{t} dt'\,(\mathfrak{V}_s\mathfrak{f}) \simeq (\mathfrak{v}\mathfrak{f})(t - t_0) - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} dt'\,\{i\,\omega\,(\mathfrak{w}\mathfrak{f})\,e^{i(\nu t' - \Phi')} + \ldots.\}.$$

Mit Heranziehung des Wertes Φ' nach (10) erhalten wir

$$z - z_0 \simeq (\mathfrak{v}\mathfrak{f})(t - t_0) - \frac{1}{2}\left\{\frac{\omega\,(\mathfrak{w}\mathfrak{f})}{\nu - (\mathfrak{v}\mathfrak{w})}\,e^{i(\nu t - \Phi(\mathfrak{r}))} + \ldots.\right\}_{t_0}^{t} \quad . \quad . \quad . \quad (16\,\mathrm{a}).$$

Für zwei in der Grenze benachbarte Teilchen im Mittel (1) bzw. (2) sind ihre z-Werte also ungleich, wenn die beiden Flußgeschwindigkeiten in ihren Tangentialkomponenten unstetig sind. So muß es auch sein, weil zwar beide Teilchen in der Grenze bleiben, aber nicht dauernd beisammen sind.

Wenn $\nu - (\mathfrak{v}\mathfrak{f})(\mathfrak{w}\mathfrak{f}) = 0$, geht (16) mit Hilfe von (15) über in

$$\zeta - \zeta_0 \simeq (\mathfrak{v}\mathfrak{f})(t - t_0) - \frac{1}{2}\left\{i\,\alpha\,(\mathfrak{w}\mathfrak{f})\cdot t\cdot e^{i[\nu t - \Phi(\mathfrak{r})]} + \ldots\ldots\right\}_{t_0}^{t} \quad . \quad (16').$$

Wenn $\nu - (\mathfrak{v}\mathfrak{w})$ verschwindet, geht (13) mit Hilfe von (10) über in

$$\Pi_s \simeq (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\Pi)\,t - \frac{1}{2}\left\{i\,\omega\,(\mathfrak{w}\,\mathbf{grad}\,\Pi)\cdot t\cdot e^{i[\nu t - \Phi(\mathfrak{r})]} + \ldots\ldots\right\} = \frac{P_s}{D} \quad . \quad (13').$$

Hängen an U mehrere Wellen zusammen, so ist die für die Grenzflächenspannungen maßgebende Verrückung die Summe der Normalverrückungen der einzelnen Wellen auf einer Seite; sie braucht nicht stetig zu sein, wie an einer freien Oberfläche.

Aus (16) gewinnen wir

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{f} = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \simeq -\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right) \simeq -\frac{1}{2}\left\{\frac{\omega\,(\mathfrak{w}\mathfrak{f})}{\nu - (\mathfrak{v}\mathfrak{f})(\mathfrak{w}\mathfrak{f})}\cdot \mathfrak{w}_t^2 \cdot e^{i[\nu t - \Phi(\mathfrak{r})]} + \ldots..\right\} \quad (17).$$

4. Die geführten Wellen der Fluidik. Unter geführter oder gebundener[1]) Welle verstehe ich eine Ausbreitungsform, die nicht in einem Mittel frei sich entfaltet, sondern die längs der Grenze eines oder zweier oder mehrerer Mittel sich erstreckt. Bei zwei Mitteln besteht sie aus zwei Wellenflanken, je eine in einem Mittel, die dauernd zusammenhängen; es gibt Grenzfälle, wo die zweite Flanke fehlt. Da die Energie sich hauptsächlich längs der U-Fläche ausbreitet, wenn die Eigenschaften beider Mittel stark verschieden sind, so kann eine gebundene Welle eine viel größere Reichweite haben als eine freie Welle, die sich in einem einzigen Mittel nach allen Richtungen fortpflanzt und in etwaigen Brechungen und Zurückwerfungen sich fortsetzt. Die gebundene Welle klammert sich an die U Fläche und läßt sich in mehr oder weniger flächiger Ausbreitung dorthin führen, wohin die U-Fläche sich erstreckt. Es ist eine eigenartige, noch nicht als solche erkannte und durchforschte Ausbreitungsform verwickelten Baues, in welchem die Besonderheit der Wellenflächen eine entscheidende Rolle spielt, minderen Freiheitsgrades infolge der Führung, mit eigener Polarisation, Geschwindigkeit, Verlöschung und Energieverteilung. Sie ist um so ausgeprägter, je größer die Unterschiede der Mittel.

Dichtebeständige und unzähe, flüssige Mittel sind ein Reich, in welchem die gebundenen Wellen fast ausschließlich herrschen. Wir wollen zunächst die nur an zwei Mitteln entlang geführte darstellen. Die beiden fließenden Mittel mit den Dichten D_1 und D_2 sollen in einer U-Fläche aneinander grenzen, die in dem betrachteten Bereich als eine Ebene $(\mathfrak{f}\,\mathfrak{r}) =$ konst. gelten möge. Sie braucht nicht mit einer Niveaufläche $\Pi =$ konst. zusammen zu fallen; auch kann die größere Dichte sehr wohl oberhalb der geringeren Dichte sich befinden (kleinere Wellen an der Unterseite größerer Wogen; kapillare Häute in allen Lagen an festen Körpern oder frei aufrecht erhalten für gewisse Zeitstrecken

[1]) K. Uller, Einige Sätze aus der Theorie der gebundenen elektromagnetischen Wellen, Zeitschrift für Physik Bd. 3 (1920), S. 361.

durch die hier zunächst vernachlässigte Zähigkeit und Oberflächenreibung der Mittel). Läuft eine geführte Welle an dieser U-Fläche entlang, so wird diese dadurch in ihren Teilen schwankend. Nachdem wir aber nach dem vorangehenden Abschnitt die von der Welle hervorgerufene mittlere Krümmung div $\mathfrak{k}$ ermittelt haben, können wir angenähert alle Normalkomponenten auf die konstante Normale der ungewellten Fläche, hier der Ebene, beziehen.

Wir haben nun nach dem 2. Abschnitt zwei Flüssigkeits-Wellenstücke des 3. Abschnittes an U dauernd miteinander zu verbinden, um eine zweiflankige Welle herzustellen. Die Wellenkohärenz-Bedingung verlangt gemäß den Ausführungen im vorigen Abschnitt und der Formel (8) daselbst

$$\mathfrak{w}_{1t} = \mathfrak{w}_{2t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Aus der Gleichheit der Normalkomponenten der Geschwindigkeiten der beiden Teilchen, die zur Zeit t in (1) bzw. (2) an U sich einander gegenüber befinden, folgt $(\mathfrak{B}, \mathfrak{k}) =$ stetig und somit nach Gl. (11) § 3 $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{k}) =$ stetig und $\omega\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k}) =$ stetig. Bei Planwelligkeit beider Flanken folgt aus (2') § 3 und (1)

$$(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k})^2 = (\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k})^2 = -\,\mathfrak{w}_t^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Es kann aber hier $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})$ nicht stetig sein, weil sonst die U-Fläche für die Welle überhaupt nicht existierte, obgleich Dichte- und Flußgeschwindigkeitsunterschiede sowie Grenzflächenspannungen bestehen. Es muß sonach gelten

$$(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k}) = -\,(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k}) = i\sqrt{\mathfrak{w}_t^2} \quad \ldots \quad (3); \qquad \omega_1 = -\,\omega_2 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

neben

$$(\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{k}) = (\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{k}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Das Geschwindigkeitspotential Ω der gebundenen Welle zeigt also stets einen Vorzeichensprung an der Führungsfläche und bewirkt, daß stets daselbst Gleitung statt hat, selbst wenn die Flußgeschwindigkeiten gleich sind. Diese Gleitung mißt $2\,\omega\,\mathfrak{w}_t$.

Bedenkt man, daß der Doppler-Effekt an bewegter U-Fläche neben der Stetigkeit von $\mathfrak{w}_t$ auch die Stetigkeit von $\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})$ verlangt, so sieht man, daß ζ und div $\mathfrak{k}$ an U stetig ausfallen, wie es ja sein muß, wenn zwei Mittel aneinander grenzen.

Schließlich soll für die beiden genannten beweglichen Teilchen gelten $P_{2s} - P_{1s} = -\,c$ div $\mathfrak{k}$, worin c die Kapillarkonstante. Diese Druckbedingung verlangt mit Rücksicht auf (14), (13), (17) im vorigen Abschnitt, sowie (3) und (4) in diesem Abschnitt, wenn wir noch $\mathfrak{v}_1^2/2$ und $\mathfrak{v}_2^2/2$ in die zur Verfügung stehende Konstante einbeziehen

$$D_2\,(\mathfrak{v}_2\,\mathbf{grad}\,\Pi_2) - D_1\,(\mathfrak{v}_1\,\mathbf{grad}\,\Pi_1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

$$\frac{D_2}{(\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{k})}\left\{\frac{(\mathfrak{w}_2\,\mathrm{grad}\,\Pi_2)}{\nu_2 - (\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{w}_2)} + i\,\{\nu_2 - (\mathfrak{v}_2\,\mathfrak{w}_2)\}\right\}$$
$$-\,\frac{D_1}{(\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{k})}\left\{\frac{(\mathfrak{w}_1\,\mathrm{grad}\,\Pi_1)}{\nu_1 - (\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{w}_1)} + i\,\{\nu_1 - (\mathfrak{v}_1\,\mathfrak{w}_1)\}\right\} + \frac{c\,\mathfrak{w}_t^2}{\nu - (\mathfrak{v}\,\mathfrak{k})\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{k})} = 0 \quad \ldots \quad (7).$$

Mit diesen Gleichungen ist nun unsere gebundene Planwelle beiderseits der Grenze zweier fließenden Mittel außerhalb ihres Erzeugungsgebietes bestimmt. Diese Wellenaufgabe ist das bisherige Verfahren außerstande zu lösen.

Die erste Bedingung gehört dem Flußfelde an. Ist grad Π stetig wie bei der Schwere, dann besagt die Bedingung (6), daß der Unterschied der Bewegungsgrößen des Flusses senkrecht stehen muß zum äußeren Kraftfeld. Ist sie nicht erfüllt, dann ist die Wellenform merklich verschieden von der durch $e^{i\nu t}$ gekennzeichneten elementaren Form, es sei denn, daß die Kapillarität die Einwirkung des äußeren Kraftfeldes stark überwiegt.

Aus der zweiten Bedingung (7) ergeben sich in Verbindung mit (3) die Fundamentalgrößen $\sqrt{\mathfrak{w}_t'^2}$ und $\sqrt{\mathfrak{w}_t''^2}$ der geführten Welle. Diese Größen sind maßgebend für die tangentielle Phasengeschwindigkeit $\nu'/|\mathfrak{w}_t'|$, für die tangentielle Wellenlänge $2\pi/|\mathfrak{w}_t'|$ sowie für die Verlöschung $e^{(\mathfrak{w}''\,\mathfrak{r})}$ und die Amplitude $\sqrt{1/2\,\omega\,\omega^*\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}^*)}$. Letztere erweist sich also bei gegebener Energiezufuhr und Erregungsform als umgekehrt proportional der Wellenlänge $2\pi/|\mathfrak{w}'|$; je kleiner diese, desto größer ist aber auch die Verlöschung.

Man erkennt an (7), daß Geschwindigkeit, Wellenlänge, Amplitude und Verlöschung von den Flußgeschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ nach Größe und Richtung derselben in bezug auf den Raum, in welchem das äußere Kraftfeld ruht, abhängig sind.

Ferner tritt die Differenz der beiden Dichten auf und nicht ihre Summe. Bei Anwesenheit eines äußeren stationären Kraftfeldes ist also der Bau der

geführten Welle von der Anordnung der Dichten in bezug auf die Richtung dieses Kraftfeldes abhängig.

Das System der Φ'- und Φ''-Ebenen in beiden Mitteln ist nach (3) symmetrisch zu U, wie verschieden auch die Dichten und Flußgeschwindigkeiten, und welches auch die Lage der U-Ebene zum Kraftfeld grad Π sein mag. An U haben wir entweder einen Kamm oder eine Mulde der Amplitudenverteilung; nie setzt sich der Amplitudenabfall von einem Mittel durch das andere fort.

Die Größen ω_1 und $\mathfrak{w}_1$ sind durch ω_2 und $\mathfrak{w}_2$ vollständig bestimmt und umgekehrt. Zur Bestimmung von ω' und ω'' gehören 2 Stücke, von $\mathfrak{w}'$ und $\mathfrak{w}''$ gehören 6 Stücke, von denen aber wegen (2') im 3. Abschnitt wieder 2 abgehen. Weitere 2 sind durch (7) festgelegt in Verbindung mit (3). Es bleiben also von $\mathfrak{w}$ nur 2 reelle Stücke willkürlich. Als solche können wir etwa die beiden Winkel nehmen, welche die Richtungen von $\mathfrak{w}_t'$ und $\mathfrak{w}_t''$ festlegen. Die zweiflankige gebundene Welle der Fluidik ist somit bei gegebenen Flußgeschwindigkeiten und gegebener Flächennormale $\mathfrak{f}$ durch 4 Bestimmungsstücke festlegbar, während in einer freien Welle 6 willkürlich sind. Der Unterschied kommt eben auf die Richtung der Flächennormale.

Wenn die Führungsfläche U seitliche Bewegung hat, $(\mathfrak{v}\,\mathfrak{f}) \neq 0$, dann tritt ein Dopplereffekt auf, der nach (3) und (5) durch

$$\nu_2 - \nu_1 = -2\,i\,(\mathfrak{v}\,\mathfrak{f})\,\sqrt{\mathfrak{w}_t^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

gemessen wird. Weiter notieren wir noch

$$\omega_1\,\omega_1^*\,[\mathfrak{w}_1\,\mathfrak{w}_1^*] + \omega_2\,\omega_2^*\,[\mathfrak{w}_2\,\mathfrak{w}_2^*] = 2\,\omega\,\omega^*\,[\mathfrak{w}_t\,\mathfrak{w}_t^*] \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

wegen (1), (3) und (4).

Bei Weiterbehandlung der gewonnenen Grundgleichungen setzen wir — die Richtungen von $\mathfrak{w}_t'$ und $\mathfrak{w}_t''$ mit $\mathfrak{j}'$ bzw. $\mathfrak{j}''$ bezeichnend —

$$(\mathfrak{v}_t\,\mathfrak{w}_t) = \left|\sqrt{\mathfrak{w}_t'^2}\right|(\mathfrak{j}'\,\mathfrak{v}) + i\left|\sqrt{\mathfrak{w}_t''^2}\right|(\mathfrak{j}''\,\mathfrak{v}) = \beta'\left|\sqrt{\mathfrak{w}_t'^2}\right| + i\,\beta''\left|\sqrt{\mathfrak{w}_t''^2}\right| \quad . \; . \quad (10)$$

$$(\mathfrak{w}_t\,\mathrm{grad}_t\,\Pi) = (\mathfrak{j}'\,\mathrm{grad}\,\Pi)\left|\sqrt{\mathfrak{w}_t'^2}\right| + i\,(\mathfrak{j}''\,\mathrm{grad}\,\Pi)\left|\sqrt{\mathfrak{w}_t''^2}\right| = \gamma'\left|\sqrt{\mathfrak{w}_t'^2}\right| + i\,\gamma''\left|\sqrt{\mathfrak{w}_t''^2}\right| \quad (11).$$

Führt man diese Ausdrücke in (7) ein unter Berücksichtigung von (3), und addiert bzw. subtrahiert man dazu den konjugiert komplexen Ausdruck, so bekommt man zwei reelle und unabhängige Gleichungen, die $\sqrt{\mathfrak{w}_t'^2}$ und $\sqrt{\mathfrak{w}_t''^2}$ enthalten; gültig darin sind nur die positiv reellen Wurzeln, weil in (10) und (11) die Wurzeln absolut vorausgesetzt sind.

Wenn man sich in der Untersuchung beschränkt auf U-Ebenen, die das Kraftfeld grad Π normal schneiden und auf Wellen, in denen $\mathfrak{w}_t''$ gleich- oder gegen gerichtet ist zu der Richtung $\mathfrak{j}$ von $\mathfrak{w}_t'$, was vielfach der Fall, dann kann man folgendes einfachere Verfahren einschlagen. Man setze

$$(\mathfrak{v}_t\,\mathfrak{w}_t) = \beta\,\{|\mathfrak{w}_t'| \pm i\,|\mathfrak{w}_t''|\}\,,$$

je nachdem Gleich- oder Gegenrichtung vorliegt; $\beta = (\mathfrak{j}\,\mathfrak{v})$. Nun ist

$$\sqrt{\mathfrak{w}_t^2} = \pm\left\{\left|\sqrt{\mathfrak{w}_t'^2}\right| \pm i\left|\sqrt{\mathfrak{w}_t''^2}\right|\right\} = x' + i\,x'' = x$$

also $$(\mathfrak{v}_t\,\mathfrak{w}_t) = \beta\,\{|x'| \pm i\,|x''|\}\,; \qquad |x'| = \sqrt{\mathfrak{w}_t'^2}\,; \qquad |x''| = \sqrt{\mathfrak{w}_t''^2} \quad . \; . \; . \quad (12).$$

Es ist daher bei festgehaltenem Vorzeichen von i in (12) zu setzen: falls die Wurzel x' positiv ausfällt: $(\mathfrak{v}_t\,\mathfrak{w}_t) = \beta\,x$, gültig für beliebiges Vorzeichen von β; und falls die Wurzel x' negativ ausfällt: $(\mathfrak{v}_t\,\mathfrak{w}_t) = -\beta\,x$, gültig für beliebiges Vorzeichen von β.

Man hat also die sich aus (7) und (3) einstellende Bedingungsgleichung für x zweimal aufzustellen: einmal mit dem Einsatz $\beta\,x$; dann sind nur die Wurzeln mit $x' > 0$ zulässig, und zum anderen Mal mit dem Einsatz: $-\beta\,x$; dann sind nur die Wurzeln mit $x' < 0$ zulässig. Da komplexe Wurzeln bei reellen Gleichungen stets konjugiert auftreten, so tritt x'' stets mit doppeltem Vorzeichen auf, die beide zulässig sind.

Ferner folgt aus $[\mathfrak{w}_t'\,\mathfrak{w}_t''] = 0 = [\mathfrak{w}_t\,\mathfrak{w}_t^*]$, daß gemäß (9) die Teilbewegung der Teilchen in (1) und (2) eine entgegengesetzte Kreisung ist, und zwar in parallelen Ebenen senkrecht zu U. Dabei ist der Umlaufsinn, wenn die Amplituden nach außen abfallen, im Mittel (1) derjenige des Uhrzeigers, wenn die Welle nach links läuft bei nach unten gerichteter Schwere. Schließlich ergibt sich in diesem Unterfalle aus (8), daß beim Doppler-Effekt der Frequenzunterschied proportional ist der Stärke der Tangentialverlöschung und der Dämpfungsunterschied umgekehrt proportional der tangentiellen Wellenlänge.

In weiteren Veröffentlichungen werden unsere vorstehend entwickelten Formeln für besondere Verhältnisse der Flußgeschwindigkeiten zueinander ausgebeutet werden. Dabei werden sehr interessante, neuartige Ergebnisse zutage treten. 703

Gießen, im Juli 1926.

Schwingungen elastischer Seile.

Von **KARL WOLF** in Wien.

Bei der Anlage von elektrischen Fernleitungen, die ja durchwegs Ströme hoher Spannung zu übertragen haben, ist es von großer Wichtigkeit, die Länge der Ausleger an den Masten so zu wählen, daß auch unter möglichst ungünstigen Verhältnissen bei Schwingungen der Drähte diese nicht einander zu nahe kommen. Man verlangt da einen Sicherheitsabstand von mindestens 12 cm für 10 000 Volt Spannungsdifferenz, um ein Durchschlagen des Stromes durch das Dielektrikum zu verhindern. Bei der Berechnung der Auslegerlänge verwendet man eine ziemlich willkürliche empirische Methode und in der vorliegenden Abhandlung soll nun für den wohl ungünstigsten Fall der Schwingungsvorgang mathematisch näher verfolgt und das Ergebnis mit einer empirischen Formel verglichen werden. Als dieser ungünstigste Fall möge jener gewählt werden, wo bei Vereisung der Seile und bei der hypothetisch größten seitlichen Windstärke das Eis an einem der Seile plötzlich herabfällt und dieses dadurch in Schwingungen gerät, während an dem parallel laufenden die Eisbelastung und die dadurch bei der größten Windstärke vorhandene Schiefstellung noch erhalten bleibt. Das Ergebnis der Rechnung soll schon hier angeführt werden: Es zeigt sich, daß bei diesem extremen Fall, der kaum je wirklich eintreten dürfte, der Abstand der beiden Seile, der notwendig ist, um eine allzu große Annäherung derselben zu vermeiden, nur um 17 vH größer angenommen werden müßte, als es die empirische Formel verlangt, man also diese mit genügender Sicherheit anwenden kann.

1. Symmetrische Vertikalschwingungen elastischer Seile. Da die gestellte Aufgabe es nicht gestattet, die Seile als unausdehnbar anzusehen — bei solchen würde ja die Eisbelastung nur die Spannung, aber nicht den Durchhang ändern — so wollen wir die kleinen Schwingungen elastischer Seile untersuchen, werden aber zunächst von der Schiefstellung des Seiles gegen die Vertikalebene infolge des Winddruckes absehen und die Bewegung behandeln, die ein Seil in der Vertikalebene bei nicht allzu großem Durchhang ausführt, wenn die Anfangslage in dieser Ebene durch seine Eisbelastung gegeben ist. Wenn wir den Draht als ein elastisches, biegsames Seil vom Querschnitt f ansehen, so ist die Spannkraft $S = Ef\left(\frac{\partial\sigma}{\partial s} - 1\right)$, wenn s die Länge des Seiles im ungespannten, σ die im gespannten Zustand und E den Elastizitätsmodul bedeutet, Ef wäre die Zugfestigkeit des Seiles.

Die Bewegungsgleichungen lauten dann [1])

$$E\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial s}-1\right)\frac{\partial x}{\partial s}\right]+\frac{q_x}{f}=\mu\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \qquad E\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial\sigma}{\partial s}-1\right)\frac{\partial y}{\partial s}\right]+\frac{q_y}{f}=\mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad . \quad (1).$$

q_x und q_y sind die Komponenten der Belastung ihrer Längeneinheit des Seiles, μ die absolute Dichte pro Längen- und Querschnittseinheit. Die Zusammenhangsbedingung, die an die Stelle der Unausdehnbarkeitsbedingung bei der aus starren Gliedern zusammengesetzten Kette tritt, wollen wir in der Form hinschreiben

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2=\left(\frac{\partial\sigma}{\partial s}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Betrachten wir zunächst das Gleichgewicht eines homogenen, elastischen Seiles, so ist $q_x = 0$, $q_y = -q_0$ und wir haben

$$\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{d\sigma}{ds}-1\right)\frac{dx}{d\sigma}\right]=0 \qquad \frac{d}{ds}\left[\left(\frac{d\sigma}{ds}-1\right)\frac{dy}{d\sigma}\right]=\frac{q_0}{Ef}.$$

Daraus erhalten wir

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}-1\right)\frac{dx}{d\sigma}=h, \qquad \left(\frac{d\sigma}{ds}-1\right)\frac{dy}{d\sigma}=\frac{q_0}{Ef}s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a),$$

wo h eine Konstante ist, die Dehnung im tiefsten Punkt der Kettenlinie, von dem aus wir auch s zu zählen beginnen. Setzen wir die Werte von $\frac{dx}{d\sigma}$ und $\frac{dy}{d\sigma}$, die sich daraus ergeben, in Gl. (2), die wir in der Form $\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2=1$ schreiben, ein, so bekommen

[1]) Vergl. Routh, Dynamik starrer Systeme. Uebersetzt von Schepp. Bd. 2 § 576.

wir, wenn wir noch zur Abkürzung $\frac{Efh}{q_0}$ mit a bezeichnen

$$\frac{d\sigma}{ds} - 1 = \frac{h}{a}\sqrt{a^2 + s^2}, \qquad \sigma = s + \frac{h}{a}\left[\frac{s}{2}\sqrt{a^2+s^2} + \frac{a^2}{2}\ln\frac{s+\sqrt{a^2+s^2}}{a}\right]$$

und weiter aus den Gleichungen (1a)

$$x = hs + a\ln\frac{s+\sqrt{a^2+s^2}}{a}, \qquad y = \frac{h}{2a}s^2 + \sqrt{a^2+s^2} - a\ ^{1)} \quad . \quad . \quad (3).$$

Das ist also die Gleichung der elastischen Kettenlinien mit s als Parameter, wobei der Ursprungspunkt des Achsenkreuzes mit dem tiefsten Punkt der Kettenlinie und die x-Achse mit der horizontalen Tangente daselbst zusammenfällt; s ist ebenfalls von diesem Punkte an gezählt (Abb. 1).

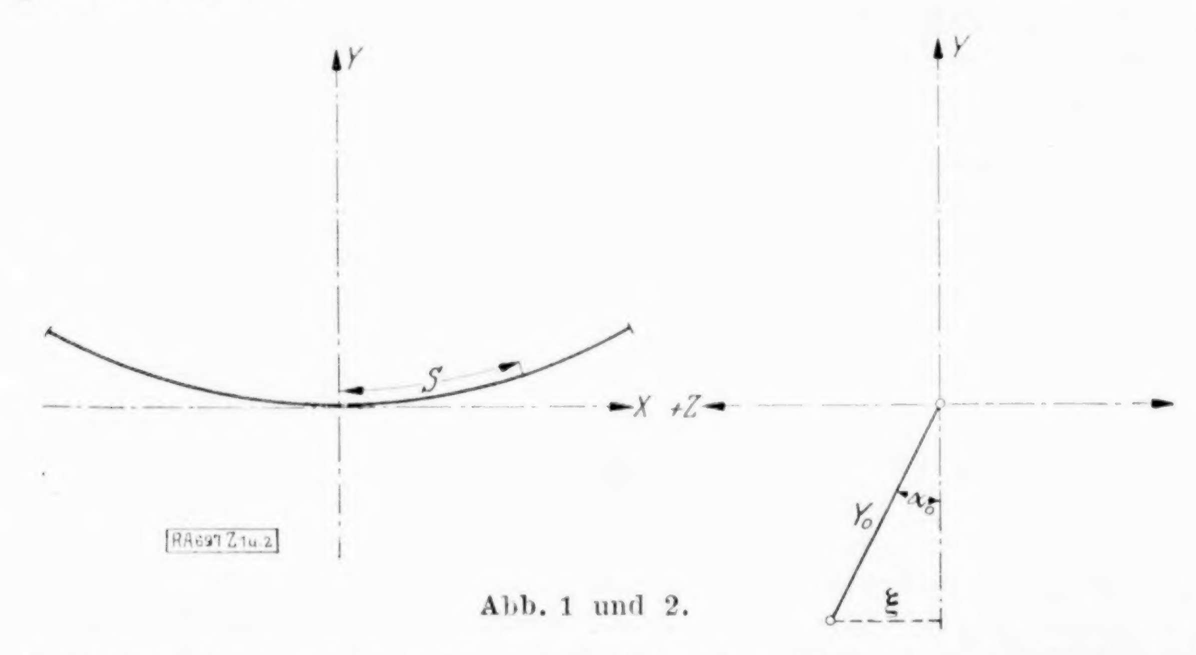


Abb. 1 und 2.

Ist der Durchhang nicht allzu groß, so ist s klein im Verhältnis zu a und die Gleichungen (3) nehmen bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in $\frac{s}{a}$ die Gestalt an

$$\sigma = s(1 + h_0), \qquad x = s, \qquad y = \frac{s^2}{2a}(1+h) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

und wir erhalten als Näherung eine Parabel $y = \frac{x^2}{2a}(1+h)$, deren Parameter sich nur um den Faktor $\frac{1}{1+h}$ von dem im Falle der gewöhnlichen Kettenlinie unterscheidet.

Um die kleinen Schwingungen eines solchen elastischen Seiles zu untersuchen, setzen wir wie üblich $x = x_1 + \xi$, $\quad y = y_1 + \eta$, $\quad \sigma = \sigma_2 + \sigma^*$,

wo $\frac{\partial\xi}{\partial s}$, $\frac{\partial\eta}{\partial s}$ und $\frac{\partial\sigma^*}{\partial s}$ kleine Größen sind, deren Quadrate wir vernachlässigen wollen, und x_1, y_1, σ_1 die Werte für die Gleichgewichtslage bei der gegebenen Belastung bedeuten. Dann gilt

$$E\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial s} - 1\right)\frac{\partial x_1}{\partial s}\frac{1}{\frac{\partial\sigma_1}{\partial s}}\right] + \frac{q_x}{f} = 0 \quad \text{und} \quad E\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial s} - 1\right)\frac{\partial y_1}{\partial s}\frac{1}{\frac{\partial\sigma_1}{\partial s}}\right] + \frac{q_y}{f} = 0$$

und wenn wir dies berücksichtigen, die obigen Werte in die Gleichungen (1) und (2) einsetzen und Größen höherer Kleinheitsordnung vernachlässigen, erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} E\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{\frac{\partial\sigma_1}{\partial s}}\left[\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial s} - 1\right)\frac{\partial\xi}{\partial s} + \frac{\frac{\partial\sigma^*}{\partial s}}{\frac{\partial\sigma_1}{\partial s}}\frac{\partial x_1}{\partial s}\right]\right\} &= \mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} \\ E\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{\frac{\partial\sigma_1}{\partial s}}\left[\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial s} - 1\right)\frac{\partial\eta}{\partial s} + \frac{\frac{\partial\sigma^*}{\partial s}}{\frac{\partial\sigma_1}{\partial s}}\frac{\partial y_1}{\partial s}\right]\right\} &= \mu\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

[1]) Vgl. etwa: F. Skrobanek, Gleichgewichtsform eines elastischen Fadens. Diese Zeitschrift Bd. 2, 1922, S. 472 ff.

$$\frac{\partial \xi}{\partial s}\frac{\partial x_1}{\partial s}+\frac{\partial \eta}{\partial s}\frac{\partial y_1}{\partial s}=\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}\frac{\partial \sigma^*}{\partial s} \qquad \text{(5)},$$

wobei wir für $\frac{\partial}{\partial \sigma}=\frac{1}{\frac{\partial \sigma}{\partial s}}\frac{\partial}{\partial s}$ geschrieben haben.

Wir wollen nun den Winkel, den die Tangente an die Kettenlinie in der Ruhelage mit der horizontalen x-Achse bildet, wir nennen ihn α, als die unabhängige und die kleine Winkeländerung φ desselben infolge der Schwingung als abhängige Variable einführen. Dann ist

$$\frac{\partial \xi}{\partial s}=\frac{\partial x}{\partial s}-\frac{\partial x_1}{\partial s}=\frac{\partial x}{\partial \sigma}\frac{\partial(\sigma_1+\sigma^*)}{\partial s}-\frac{\partial x_1}{\partial \sigma_1}\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}=\cos(\alpha+\varphi)\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}+\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}\right)-\cos\alpha\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}$$

$$=\cos\alpha\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}+\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}\right)-\varphi\sin\alpha\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}-\cos\alpha\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}, \text{ also}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial s}=-\varphi\sin\alpha\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}+\cos\alpha\frac{\partial \sigma^*}{\partial s} \text{ und analog } \frac{\partial \eta}{\partial s}=\varphi\cos\alpha\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}+\sin\alpha\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}.$$

Die Zusammenhangsbedingung (5) ist dadurch schon von selbst erfüllt. Da $q_x=0$ und $q_y=f\mu g$ ist, so ergibt sich aus der Gleichgewichtslage vor der Schwingung

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}-1\right)\cos\alpha=h \quad\text{oder}\quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial s}=\frac{h+\cos\alpha}{\cos\alpha} \quad\text{und}$$

$$E\frac{\partial}{\partial s}(h\operatorname{tg}\alpha)-\mu g=0 \quad\text{oder}\quad \frac{\partial}{\partial \sigma_1}(h\operatorname{tg}\alpha)\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}=\frac{\mu g}{E}$$

bzw. wenn wir $\frac{\partial}{\partial \sigma_1}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \alpha}$ einführen — ϱ ist dabei der Krümmungsradius der ruhenden Kettenlinie —

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}\frac{\partial}{\partial \alpha}(h\operatorname{tg}\alpha)=\frac{\mu g}{E} \quad\text{und daraus}\quad \frac{E}{\varrho\mu}\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}=\frac{g\cos^2\alpha}{h}.$$

Setzen wir alle diese Werte in die Gleichungen (4) ein, so bekommen wir

$$g\cos^2\alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{-\varphi\operatorname{tg}\alpha+\frac{\cos\alpha}{h}\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}\right\}=\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \qquad g\cos^2\alpha\frac{\partial}{\partial \alpha}\left\{\varphi+\frac{\sin\alpha}{h}\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}\right\}=\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}.$$

Wenn wir nun $\frac{\cos\alpha}{h}\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}$ als neue Variable U einführen, so erhalten wir nach einigen Umformungen

$$\varrho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\frac{h}{h+\cos\alpha}=g\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}-2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right\}\cos\alpha, \qquad \varrho\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}=g\left\{2\frac{\partial U}{\partial \alpha}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}\right\}\cos\alpha \quad \text{(6)}.$$

Aus diesen beiden Differentialgleichungen zweiter Ordnung können wir noch φ eliminieren und erhalten als endgültige partielle Differentialgleichung vierter Ordnung für die kleinen Schwingungen eines elastischen Seiles, das nur vertikal belastet ist, den Ausdruck

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}-\frac{\varrho h}{g\cos\alpha(h+\cos\alpha)}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right]=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{g\cos\alpha}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(4U+\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2}-\frac{gh}{g\cos\alpha(h+\cos\alpha)}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\right)\right] \quad \text{(7)}.$$

Aus dieser Gleichung könnte man das U und aus der ersten der Gleichungen (6) dann das φ berechnen. Setzt man in diese Formeln $h=0$, so erhält man die entsprechenden Ausdrücke für die unelastische Kette.

Diese allgemeinen Gleichungen bieten aber, selbst wenn man den Durchhang als klein annimmt, bei ihrer Lösung unter den Randbedingungen der gestellten Aufgabe zu große mathematische Schwierigkeiten. Wir wollen daher einen anderen direkten Weg einschlagen und die Voraussetzung machen, daß wir die Bewegungen in der Horizontalen gegenüber denen in der vertikalen Richtung vernachlässigen können, was natürlich nur bei geringem Durchhang erlaubt sein wird. Dabei müssen wir auch darauf achten, die Vernachlässigungen nicht soweit zu treiben, daß nur die Gleichung für die gespannte Saite übrig bleibt.

Wenn wir dies tun, so nehmen die Gleichungen (4) die Form an

$$E\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}}{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}\right)^2}\frac{\partial x_1}{\partial s}\right]=0, \qquad E\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}-1\right)\frac{\partial \eta}{\partial s}+\frac{1}{\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}\right)^2}\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}\frac{\partial y_1}{\partial s}\right\}=\mu\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad \text{(8)}.$$

Die Zusammenhangsbedingung lassen wir vorläufig unberücksichtigt. Wir ersetzen nun die ruhende elastische Kettenlinie entsprechend dem früher Erwähnten durch eine Parabel, die denselben kleinen Durchhang d hat und durch die Befestigungspunkte geht. Das gibt

$$x_1 = s(1+\varkappa), \qquad y_1 + d_1 = \frac{s^2}{2a}(1+h_1) \quad \text{oder} \quad y_1 = -\frac{p_1}{l^2}(s^2 - l^2), \quad \sigma_1 = s(1+h_1),$$

wo $\varkappa$ eine neue aus diesen Bedingungen zu berechnende Konstante ist und h_1 und a dieselbe Bedeutung wie früher haben. Aus der ersten der Gleichungen (8) bekommt man dann

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1-\varkappa}{(1+h_1)^2}\frac{\partial \sigma^*}{\partial s}\right\} = 0 \text{ bzw. } \frac{\partial \sigma^*}{\partial s} = f(t)\frac{(1+h_1)^2}{1-\varkappa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

wo $f(t)$ eine willkürliche Funktion der Zeit bedeutet. Dies in die zweite eingeführt, ergibt

$$c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial s^2} + g\,\frac{1+h_1}{h_1(\varkappa-1)}\,f(t) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

wenn man

$$\frac{E f_0 h_1}{q_1(1+h_1)} = c^2$$

setzt. Wählt man nun eine neue Veränderliche η_1 und eine neue Funktion $\varphi(t)$ entsprechend der Beziehung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = f(t), \qquad \eta = \eta_1 + \frac{g(1+h_1)}{h_1(1-\varkappa)}\,\varphi(t),$$

so geht (9) in die Form über

$$c^2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10\,a)$$

und wir können, wenn wir nur symmetrische Schwingungen betrachten, die Lösung in der Gestalt hinschreiben

$$\eta = \sum_{\nu=\nu_\infty}^{\nu=\nu_0} (A_\nu \sin rt + B_\nu \cos rt)\cos\frac{r}{c}s + \varphi(t)\,\frac{g(1+h_1)}{h_1(1-\varkappa)} \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Die Randbedingungen unseres Problems sind nun folgende:

a) Anfangs- und Endpunkt unseres Seiles müssen dauernd fest bleiben. Bezeichnen wir die halbe Länge desselben im ungespannten Zustand mit l, die halbe Spannweite mit b, so muß für

$$s = \pm l, \qquad \eta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

sein.

b) Für $t=0$, d. i. für den Augenblick, wo die gleichmäßige Eisbelastung abfällt, muß das Seil die zu dieser Belastung mit dem spezifischen Gewicht q_e gehörige Parabel mit dem Durchhang d_0 bilden, also für

$$t = 0 \ldots \eta = \eta_0 = y_1 - y_0 = \alpha(s^2 - l^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

sein, wo $\alpha = \frac{d_0 - d_1}{l^2}$ gesetzt ist.

c) Ferner muß für den Anfangsmoment das Seil in Ruhe sein, daher für

$$t = 0 \ldots \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

sein. Die der Anfangslage entsprechenden Größen sind immer mit dem Weiser 0, die zu der Ruhelage gehörigen, um die die Schwingung ausgeführt wird, mit dem Weiser 1 versehen.

d) Die Zusammenhangsbedingung für die Endpunkte des Seiles, für

$$s = \pm l \ldots \frac{q_1}{E f h_1}\, s\, \frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{\partial \sigma^*}{\partial s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

wollen wir dazu benutzen, um die noch willkürliche Frequenz r zu bestimmen.

Aus (a) erhält man

$$\varphi(t) = -\frac{h_1(1-\varkappa)}{g(1+h_1)} \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu=\nu_\infty} (A_\nu \sin rt + B_\nu \cos rt)\cos\frac{r}{c}l,$$

aus (c)

$$A_\nu = 0,$$

so daß jetzt η die Gestalt hat

$$\eta = \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu=\nu_\infty} B_\nu \cos \nu t \left(\cos \frac{\nu}{c} s - \cos \frac{\nu}{c} l\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und

$$\frac{\partial \sigma^*}{\partial s} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \frac{(1+h_1)^2}{1-\varkappa} = \frac{h_1}{g} (1+h_1) \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu=\nu_\infty} B_\nu \nu^2 \cos \nu t \cos \frac{\nu}{c} l$$

ist.

Die Bedingung (d) gibt

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{\nu=\nu_\infty} B_\nu \cos \nu t \left\{\frac{h_1(1+h_1)}{g} \nu \cos \frac{\nu}{c} l + \frac{q_1 l}{E f h_1 c} \sin \frac{\nu}{c} l\right\} = 0,$$

woraus man, wenn $\frac{\nu}{c} l = \varphi$ gesetzt wird, die Periodengleichung

$$\frac{c \varphi}{l} \cos \varphi + \frac{q_1 l}{E f c h_1^2 (1+h_1)} \sin \varphi = 0$$

bekommt, die man auch in der Form schreiben kann

$$\operatorname{tg} \varphi = -k \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13),$$

wo $k = \frac{(Ef)^2 h_1^3}{q_1^2 l^2}$ also eine positive reelle Zahl ist. Die unendlich vielen Wurzeln dieser transzendenten Gleichung von bekanntem Typus $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_\infty$ liefern uns die Eigenwerte des vorgelegten Problems für das Intervall 0 bis l. Setzen wir $\frac{s}{l} = x$, so bilden die Funktionen $\cos \varphi_n x - \cos \varphi_n$ ein Orthogonalitätssystem; denn wir haben für $m \neq n$

$$\int_0^1 [\cos(\varphi_n x) - \cos \varphi_n] \cos(\varphi_m x)\, dx = k(-\cos \varphi_n \cos \varphi_m + \cos \varphi_n \cos \varphi_m) = 0$$

und für $m = n$

$$\int_0^1 [\cos^2(\varphi_n x) - \cos \varphi_n \cos(\varphi_n x)]\, dx = {}^1/_2 (1 + k \cos^2 \varphi_n),$$

wenn wir bei den Integrationen immer auf die Periodengleichung Rücksicht nehmen. Infolgedessen können wir wenigstens formal eine in dem Intervall von 0 bis 1 mit gewissen Einschränkungen willkürlich vorgegebene Funktion $f(x)$ nach Fourierart in eine Reihe von der Gestalt entwickeln

$$f(x) \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n (\cos \varphi_n x - \cos \varphi_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

wo

$$B_n = \frac{2}{1 + k^2 \cos \varphi_n} \int_0^1 f(x) \cos \varphi_n x$$

für $n \neq 0$ und $B_0 = 0$ ist.

Das können wir benutzen, um die Randbedingung (b) zu befriedigen, wir müssen die Beiwerte B_ν in (12) so bestimmen, daß für $t = 0$ der Ausdruck (12) entsprechend der Formel (14) die Funktion

$$\alpha(s^2 - l^2) = \alpha l^2 (x^2 - 1)$$

im Intervall 0 bis 1 darstellt. Das gibt

$$B_n = \frac{2 \alpha l^2}{1 + k \cos^2 \varphi_n} \int_0^1 (x^2 - 1) \cos(\varphi_n x)\, dx = \frac{4 \alpha (h+1) l^2 \cos \varphi_n}{(1 + k \cos^2 \varphi_n) \varphi_n^2},$$

also

$$x^2 - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(k+1) \cos \varphi_n}{(1 + k \cos^2 \varphi_n) \varphi_n^2} (\cos(\varphi_n x) - \cos \varphi_n).$$

Dies ist eine im Intervalle 0 bis 1 gleichmäßig konvergente Reihe, deren Glieder wegen des φ_n^2 im Nenner schnell abnehmen — die Wurzel φ_n liegt ja zwischen $\frac{2n+1}{2} \pi$ und

$(n+1)\pi$ — und die wirklich die gegebene Funktion $x^2 - 1$ in dem Intervalle darstellt, wovon man sich auch durch direktes Ausrechnen für spezielle Werte von x überzeugen kann. So ist für $x = 0$

$$-1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(h+1)\cos q_n (1 - \cos q_n)}{(1 + k\cos^2 q_n)\, q_n^2}.$$

Dementsprechend hat unsere die gestellten Grenzbedingungen befriedigende Lösung die Gestalt

$$\eta = 4\,\alpha\, l^2 (1+k) \sum_{n=1}^{k=\infty} \frac{\cos q_n}{(1 + k\cos^2 q_n)\, q_n^2} \cos\frac{c\, q_n}{l} t \left(\cos\frac{q_n s}{l} - \cos q_n\right) \quad . \quad . \quad (15).$$

Die zu der schon in der Gleichgewichtslage vorhandenen Spannkraft infolge der Schwingung hinzutretende Zusatzkraft ist ebenfalls eine periodische Funktion der Zeit und hat die Form

$$s'' = 4\,Ef \frac{h_1(1+h_1)}{g} \alpha c^2 (k+1) \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos^2 q_n}{(1 + k\cos^2 q_n)} \cos\frac{c\, q_n}{l} t.$$

2. Seitliche Schwingungen. Betrachten wir nun kleine seitliche Schwingungen des Seiles um seine vertikale Ruhelage, so haben wir, da in der Formel $z = z_1 + \xi$ jetzt $z_1 = 0$ ist, einfach $z = \xi$ zu setzen und bekommen zu den Gleichungen (4) noch eine dritte

$$E\frac{\partial}{\partial s}\left\{\frac{1}{\frac{\partial \sigma_1}{\partial s}}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial s} - 1\right)\frac{\partial \xi}{\partial s}\right\} = \mu\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die Gleichung (5) ändert sich nicht; wir können die kleinen Schwingungen einfach überlagern.

Ersetzen wir wieder die elastische Kettenlinie in der Ruhe wie früher durch eine Parabel, so nimmt (16) die Form an

$$c_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

mit derselben Bedeutung von c wie oben.

Die Lösung setzen wir in der Form an

$$\xi = \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu=\nu_\infty} \cos\nu t\left(A_\nu' \sin\frac{\nu}{c} s + B_\nu' \cos\frac{\nu}{c} s\right) = \sum_{\nu=\nu_0}^{\nu=\nu_\infty} C_\nu \cos\nu t \sin\frac{\nu}{c}(s + l_0) \quad . \quad (17),$$

wobei wir wegen der Anfangsbedingung, $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$ für $t = 0$, schon die Glieder mit $\sin \nu t$ weggelassen haben.

Die weitere Bedingung, daß für $s = \pm l \ldots \xi = 0$ sein muß, liefert uns die Periodengleichung

$$\nu = \frac{c\, n\, \pi}{2\, l} \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Die Anfangslage des Seiles sei dadurch festgelegt, daß für $t = 0$

$$\xi = -\sin\alpha_0 y_0 = -\sin\alpha_0 \frac{d_0}{l^2}(s^2 - l^2) = -\beta(s^2 - l^2).$$

Setzen wir $s + l = s_1$, so haben wir die C_n als Koeffizienten einer Fourierreihe zu bestimmen, die uns diese Funktion darstellt

$$-\beta(s_1^2 - 2 s_1 l) = \sum_{n=0}^{n=\infty} C_n \sin\frac{n\pi}{2\, l} s_2.$$

Wir erhalten, da die Glieder mit graden Vielfachen des Argumentes entsprechend der Symmetrie in s wegfallen,

$$C_n = +\frac{32\,\beta l^2}{\pi^3}\frac{1}{(2n+1)^3}$$

und daraus

$$\xi = \frac{32\,\beta l^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2\, l}(s + l)\cos\frac{c\,(2n+1)\pi}{2\, l} t \quad . \quad . \quad (19)$$

als endgültige Lösung. Man erkennt daraus, daß alle Punkte des Seiles nach dem gleichen Zeitintervall $\tau = \frac{2l}{c}$ den größten Ausschlag nach der anderen Seite $-\xi_0$ zeigen, die Bewegung aller Punkte also die Periode 2τ hat.

3. Ausrechnung eines Beispiels. Die abgeleiteten Resultate wollen wir nun dazu benutzen, um an der Hand eines speziellen Falles die anfangs gestellte Aufgabe zu lösen und den Vergleich mit den empirischen Annahmen bei der Berechnung der Länge der Ausleger durchzuführen.

Da bei einem konstanten seitlichen Winddruck mit der spezifischen Belastung q_w das Seil eben bleibt und sich seine Ebene nun gegenüber der vertikalen um einen Winkel α entsprechend der Beziehung $\operatorname{tg} \alpha = \frac{q_w}{q_e}$ herausdreht, so kann die elastische Kettenlinie unter dieser Bedingung genau so berechnet werden wie in der Vertikalebene, nur ist die spezifische Belastung q jetzt gleich $q = \sqrt{q_e^2 + q_w^2}$ und wir können die Schwingungen in dieser Ebene nach Formel (15) berechnen. Ist das Seil vereist, so wird es wegen des dann vorhandenen größeren Winddruckes noch weiter herausgedreht und bei Abfallen des Eises führt es dann auch seitliche Schwingungen um die dem Winddruck ohne Eis entsprechende Ebene aus. Wir können also unsere frühere Vertikalebene durch diese letztere Ebene ersetzen und die für die Vertikal- und seitlichen Schwingungen gefundenen Formeln benutzen.

Als konkretes Beispiel nehmen wir ein Kupferseil von 70 qmm Nennquerschnitt (wirklicher Querschnitt 66 qmm) und mit einem Gewicht pro Längeneinheit $q_1 = 0{,}587$ kg/m; die Spannweite sei 200 m, also $b = 100$ m, die halbe Länge des Seiles in ungespanntem Zustande $l = 100{,}17$ m. Dann ergibt sich bei $E = 1{,}3 \cdot 10^6$ kg/qcm aus den Formeln

$$l_1 + l(1 + h_1) = b + \frac{d_1^2}{b} \quad \text{und} \quad d_1 = \frac{l^2(1+h_1)\,q_1}{2\,h_1 E f}$$

eine Horizontaldehnung $h_1 = 6{,}92 \cdot 10^{-4}$ und ein Durchhang $d_1 = 4{,}91$ m bei einer Temperatur von 0^0 C. Kommt eine Eisbelastung dazu, die wir nach der in der Praxis gebräuchlichen Formel q_{Eis} in Gramm mit $160\sqrt{2r}$ bestimmen, r der Halbmesser des Seiles in mm gerechnet, so erhalten wir für die gesamte spezifische Belastung $q_0 = 1{,}171$ kg/m und daraus $h_0 = 11{,}7 \cdot 10^4$ mit einem Durchhang $d_0 = 5{,}63$ m.

Wirkt nun außerdem ein horizontaler Winddruck, den wir maximal wie üblich mit 125 kg/qm gedrückter Fläche mit einem Abminderungsfaktor von $^1/_2$, also mit 62,5 kg/qm der Vertikalprojektion des Seiles ansetzen, so erhalten wir eine Horizontalkomponente der spezifischen Belastung im Betrage von 0,584 kg/m bei eisfreiem, bzw. 1,875 kg/m bei vereistem Seil. Der Winkel, um den dasselbe aus den Vertikalen herausgedreht wird, ist im ersten Falle 45^0, im zweiten 58^0. Die gesamte spezifische Belastung ist dann ohne Eis $q_1 = 0{,}830$ kg/m, mit Eis $q_0 = 2{,}211$ kg/m, die entsprechenden Werte von h sind $h_1 = 9{,}47 \cdot 10^{-4}$ und $h_0 = 2{,}098 \cdot 10^{-3}$, die des Durchhanges $d_1 = 5{,}13$ bezw. $d_0 = 6{,}16$ m, natürlich immer in der schiefgestellten Ebene des Seiles gemessen.

Mit diesen letzteren Werten erhält man $c = 97{,}893$ und die Periodengleichung (13) lautet

$$\operatorname{tg} \varphi = -0{,}0904\,\varphi.$$

Die ersten zehn Wurzeln dieser transzendenten Gleichung wurden auf graphischem Wege mit nachfolgender numerischer Kontrolle bestimmt, die sechs ersten seien etwa angeschrieben

$$\varphi_1 = 2{,}886, \quad \varphi_2 = 5{,}800, \quad \varphi_3 = 8{,}755, \quad \varphi_4 = 11{,}751, \quad \varphi_5 = 14{,}780, \quad \varphi_6 = 17{,}834.$$

Zunächst wurde bei vertikal hängendem Seil ohne Winddruck die Gestalt des Seiles nach einem Zeitintervall $\tau_1 = \frac{l\pi}{c\varphi_1}$, das der Halbperiode der ersten Hauptschwingung entspricht, ermittelt, und zwar wurden nach Gl. (15) die η für $s = 0$, $s = \frac{l}{4}$, $s = \frac{l}{2}$, $s = \frac{3l}{4}$ gerechnet. Dabei wäre zu erwähnen, daß das Seil in der Mitte für $s = 0$ etwas höher nach oben sich bewegt, als es sich im Anfang unter der Ruhelage befindet. Es hängt dies mit der Art der Anfangsbelastung zusammen, man kann sich von der qualitativen Richtigkeit des Ergebnisses leicht durch einen Versuch an einer ähnlich belasteten Gummischnur überzeugen. In unserem Beispiel sind die Werte $\eta_0 = -0{,}70$, $\eta_{\tau_1} = +0{,}074$ m.

Weiter wurde dieselbe Rechnung mit den obigen Wurzelwerten für den uns interessierenden Fall des unter Winddruck schiefgestellten Seiles durchgeführt, und zwar

jetzt für ein Zeitintervall, das der Halbperiode der seitlichen Schwingung $\tau = \frac{2\,l}{c}$ entspricht. In Abb. 3 ist die dann eintretende Gestalt des Seiles eingezeichnet, wobei die Ordinaten in sechsmal größerem Maßstab als die Horizontalentfernungen eingetragen sind.

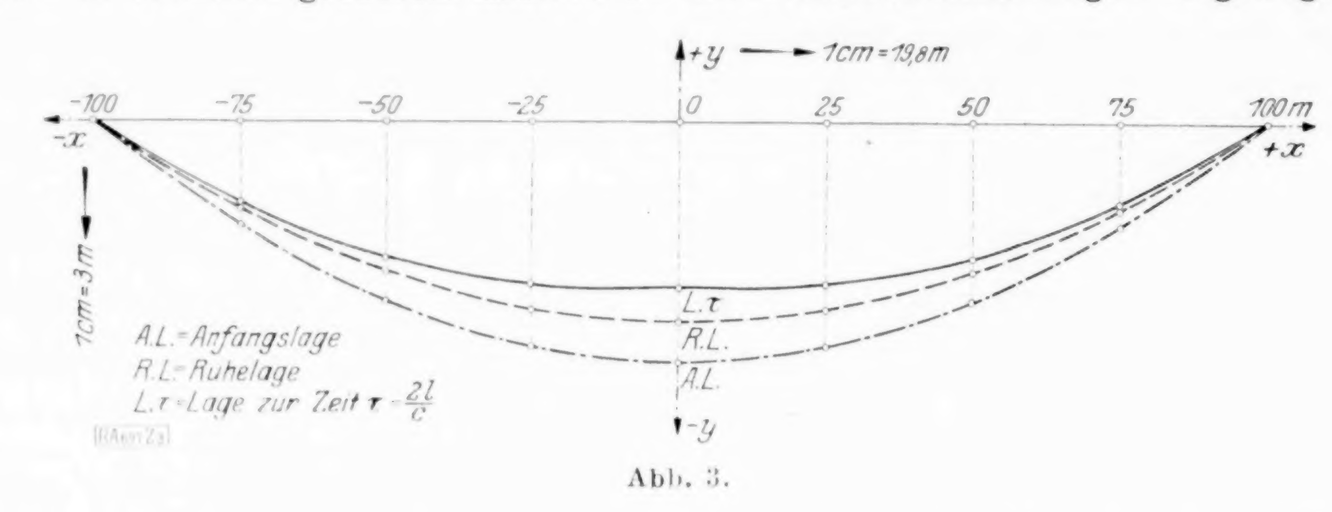


Abb. 3.

Um jene Stellen zu finden, an denen ein derartig infolge des Herabfallens des Eises um seine schiefe Gleichgewichtslage schwingendes Seil bei größtem seitlichem Ausschlag dem noch mit Eis belastetem, parallel laufenden, das sich in der Gleichgewichtslage befindet, am nächsten kommt, sind beide Seile auf eine durch die Aufhängepunkte gehende Vertikalebene projiziert worden, Abb. 4. Man ersieht aus dieser, daß in unserem speziellen Beispiel, wo die Projektionslinien sich nicht schneiden, die mittleren Punkte einander am nächsten kommen. In anderen Fällen wären es die den beiden symmetrisch zur Mitte liegenden Schnittpunkten der Projektionen entsprechenden Stellen.

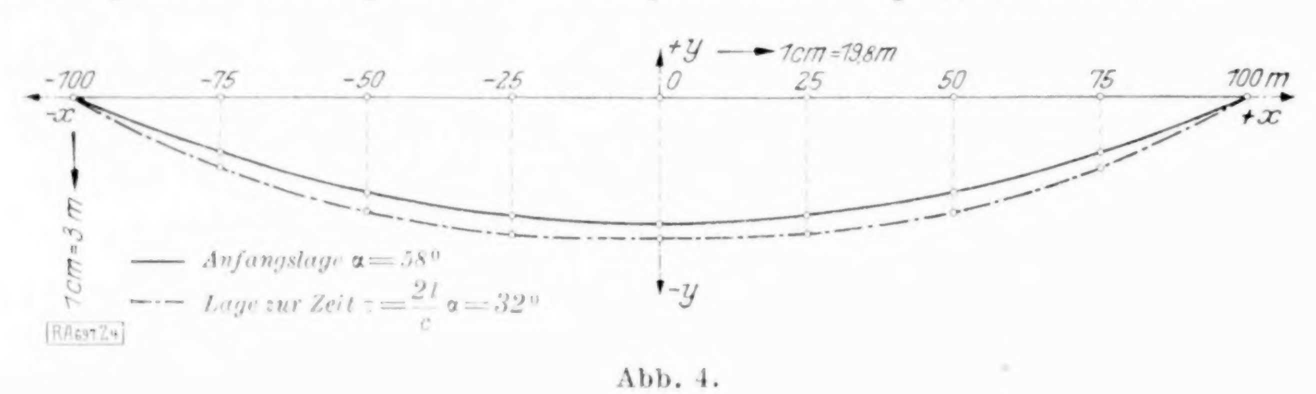


Abb. 4.

Aus Abb. 5, welche die Projektion beider Seile auf eine zu ihnen senkrecht durch ihre Mittelpunkte gehende Ebene darstellt, kann man die kleinste Entfernung der Aufhängepunkte berechnen, die zu einem gegebenen Sicherheitsabstand e gehört, der notwendig ist, um das Durchschlagen des Dielektrikums zu verhindern. Wählt man e etwa 1·2 m, entsprechend einer Höchstspannung von 100 000 Volt, so erhält man für a in unserem Beispiel 4·18 m. Nach einer in der Praxis üblichen Vorschrift bestimmt man diesen Abstand derartig, daß zwei je unter einem Viertel des bei dem größten Winddruck ohne Eisbelastung vorhandenen Ablenkungswinkel gegeneinander aus der Vertikalen geneigte Seile bei einem einer Temperatur von 40° C entsprechenden Durchhang in ihren tiefsten Punkten gerade um den Sicherheitsabstand voneinander entfernt sind. Das gibt in unserem Beispiel bei einem Winkel von je einem Viertel von 45°, d. i. also von 11° 15′ und einem Ausdehnungskoeffizienten von $17 \cdot 10^{-6}$ pro 1° C einen Abstand a von 3·57 m.

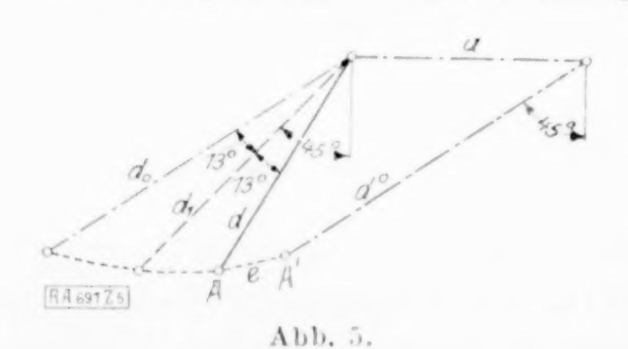


Abb. 5.

Da diese beiden Resultate nur um 17 vH voneinander abweichen, erkennt man, daß diese empirische Regel relativ gute Ergebnisse für die Länge der Ausleger der Maste liefert, also ohne weiteres angewendet werden kann, zumal, wenn man sich vor Augen hält, daß wir ja bei unserem Beispiel äußerst ungünstige, in Wirklichkeit kaum je vorkommende Verhältnisse zugrunde gelegt haben.

Wien, 2. Juli 1926. 697

KURZE AUSZÜGE

Mathematische Statistik.

Stochastik. Wenn statistische Zahlen uns nicht als solche, sondern als Anzeichen des dahinter verborgenen, typischen Werts interessieren, so wird die Frage nach dem Weg der Erkenntnis der durch Zufall entstellten wahren Größen das zentrale Problem der statistischen Theorie. Solche an der Wahrscheinlichkeitstheorie orientierte Betrachtung empirischer Verhältnisse bezeichnet A. A. Tschuprow (Ziele und Wege der stochastischen Grundlegung der statistischen Theorie. Nordisk Statistisk Tidskrift, Bd. 3, H. 4, 1924) als »Stochastik«.

Wenn von zwei zufälligen Variablen die eine einen bestimmten Wert annimmt und die andere den Charakter der zufälligen Variablen behält, so nennt man die beiden Variablen stochastisch verbunden. Es gibt vier Beziehungen zwischen zwei Variablen, je nachdem die eine zufällig oder nicht zufällig ist und die andere mit ihr funktionell oder stochastisch verbunden ist. Falls eine zufällige Variable mit einer anderen zufälligen Variablen funktionell zusammenhängt, kann der umgekehrte Zusammenhang stochastisch sein. Die Korrelationstheorie interessiert es, wenn eine zufällige Variable stochastisch mit einer anderen, demnach ebenfalls zufälligen Variablen verbunden ist.

Die Verteilungsgesetze, welchen die eine Variable Y nach Festlegung des Werts der andern X folgt, heißen bedingte Verteilungsgesetze der einen Variablen für bestimmte Werte der anderen. Die eine Variable ist von der anderen stochastisch unabhängig, falls die Verteilungsgesetze von Y für alle Werte von X identisch sind. Ein anderer Unabhängigkeitsbegriff ist das Nichtkorreliertsein, ein Begriff, der nicht umgekehrt werden darf. Stochastische Unabhängigkeit bedingt Nichtkorreliertsein, aber nicht umgekehrt. Falls die Regression nicht linear ist, entspricht einem funktionellen, nicht linearen Zusammenhang ein Wert des Korrelationskoeffizienten, der kleiner als 1 ist.

Betrachtungen rein apriorischer oder rein empirischer Natur werden als Sylleptik bezeichnet. Es ist nach Tschuprow von höchster Wichtigkeit, beide Systeme scharf auseinanderzuhalten.

Der apriorische Korrelationskoeffizient kann nur dann gleich eins sein, wenn die Variablen im linearen Zusammenhang; sind sie stochastisch verbunden oder in einem funktionellen, nichtlinearen Zusammenhang, so ist er kleiner als eins. Er wird gleich null, wenn die eine Variable mit der andern nicht korreliert ist, aber nicht umgekehrt.

Der empirische Korrelationskoeffizient ist eins, falls die Abweichungen der einzelnen Werte der beiden Variablen von ihren respektiven Durchschnitten zufällig einander proportional sind. Er kann unbestimmt sein, falls alle empirischen Werte einer der Variablen zufällig einander gleich sind. Dieser Satz hat im apriorischen System kein Gegenstück. Ueber die Kenntnis der apriorischen Abhängigkeitsgesetze verfügen wir nur in wenigen Fällen.

Aufgabe der Stochastik ist es, eine Brücke zwischen den beiden sylleptischen Gebieten zu schlagen. Hierzu dient das Gesetz der großen Zahlen. Will man auf Grund empirischer Werte den numerischen Wert einer apriorischen Größe abschätzen, so bildet man eine Funktion der empirischen Werte, deren mathematische Erwartung der apriorischen Größe gleich ist.

Der sich so ergebende Präsumptivwert ist selbst eine zufällige Variable. Der Präsumptivwert einer Funktion einer Variablen ist nicht etwa gleich der betreffenden Funktion des Präsumptivwertes dieser Variablen.

Häufig wird zur Schätzung einer Funktion der apriorischen Wahrscheinlichkeiten dieselbe Funktion der entsprechenden statistischen Häufigkeiten verwendet. Gelegentlich ist es auch möglich, von verschiedenen Funktionen der empirischen Werte auszugehen.

Weicht die mathematische Erwartung der Funktion der empirischen Werte von dem apriorischen Wert ab, so läßt sich, wenn die mathematische Erwartung genau errechenbar, gelegentlich eine modifizierte Funktion der empirischen Werte bilden, deren mathematische Erwartung gleich dem apriorischen Wert. Die Schätzung apriorischer Größen mit Hilfe empirischen Materials hängt also eng mit den stochastischen Voraussetzungen in Bezug auf die Verbundenheit der empirischen Versuche zusammen.

Die Lexissche Dispersionstheorie kann im großen und ganzen aufrecht erhalten werden, falls die apriorischen Größen bekannt sind. Im andern Falle kann aber die mathematische Erwartung des Divergenzkoeffizienten gleich eins sein, sowohl wenn die Versuche gegenseitig unabhängig sind — und hierfür ist das Theorem aufgestellt —, als auch wenn sie uniform verbunden sind. Als uniform verbunden werden Versuche bezeichnet, bei denen das Abhängigkeitsgesetz für eine Teilgesamtheit von t Versuchen bei jeder möglichen Auswahl von t das gleiche bleibt. Hierunter fällt das Schema der nicht zurückgelegten Nummer, das der dazugelegten Nummer, endlich auch die unverbundenen Versuche. Das Lexissche Kriterium erlaubt also die Unterscheidung der einzelnen Abarten nicht. Die einzelnen Varianten des Schemas der uniform verbundenen Versuche sind empirisch nicht unterscheidbar.

Gesetz der großen Zahlen. Unter dem Titel »On the asymptotic frequency distribution of the arithmetic means of n correlated obser-

vations for very great values of n« untersucht A. A. Tschuprow im Journal of the R. Stat. Soc., Bd. 88 H. 1, Jan. 1925, die Gültigkeitsbedingung des Gesetzes der großen Zahlen. Hierunter wird verstanden:

»Die Reihe der arithmetischen Mittel für n unkorrelierte Werte einer zufälligen Variablen konvergiert nach einem bestimmten Wert.«. Zunächst wird nach Markoffs Verfahren für eine Verteilung mit endlichem Variationsbereich eine obere Grenze für die Wahrscheinlichkeit dafür aufgestellt, daß der absolute Betrag eines Fehlers unterhalb eines bestimmten Bruchteils des mittleren Fehlers liege. Wenn die Fehler endlich sind, lautet eine notwendige Bedingung für die Gültigkeit des Gesetzes der großen Zahlen: Die mittlere Abweichung des arithmetischen Mittels vom Mittelwert der mathematischen Erwartungen bei jedem einzelnen Versuch muß mit wachsender Zahl der Versuche gegen null gehen. Selbst bei voneinander unabhängigen Versuchsreihen ist diese Bedingung nicht erfüllt, wenn nicht alle mittleren Fehler endlich sind. Auch bei voneinander abhängigen Versuchsreihen braucht diese Bedingung nicht erfüllt zu sein. Ein solcher Fall ist das Ziehen von Nummern aus einer Urne, wenn die gezogene Nummer nachher zweimal wieder hineingelegt wird.

Uebrigens sieht man ohne weiteres ein: das Gesetz der großen Zahlen gilt, je nachdem die mittleren Fehler des arithmetischen Mittels mit wachsender Zahl der Versuche nach Null gehen oder nicht. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das arithmetische Mittel von n zufälligen Werten einer zufälligen Variablen k ter Ordnung mit wachsender Zahl der Versuche selbst eine zufällige Variable wird, daß also das Gesetz der großen Zahlen nicht gilt, hat Watanabe aufgestellt. Sie lautet: Die symmetrische Determinante k ter Ordnung, gebildet aus den Grenzwerten der mathematischen Erwartungen nullter bis k ter Potenz der Mittelwerte der zufälligen Variablen muß null und die entsprechende Determinante $k-1$. Ordnung von null verschieden sein.

Hierzu wird ein einfaches Beispiel konstruiert. Je nachdem die aus einer Urne gezogene Kugel weiß ist oder nicht, sollen ohne Rücklage n Kugeln aus Urne 1 oder aus Urne 2 gezogen werden. Wenn die Wahrscheinlichkeiten, eine weiße Kugel zu ziehen, bei den beiden Urnen verschieden sind, so wird die mittlere Abweichung von der relativen Häufigkeit der weißen Kugeln bei den $n+1$ Ziehungen mit wachsendem n nicht nach Null gehen, das Gesetz der großen Zahl also nicht erfüllt sein.

Verteilung von Differenzen. Eine zufällige Auswahl von n Individuen aus einer Population von N mit gegebenem Verteilungsgesetz $\Phi(x)$ wird nach der Größe x geordnet. J. O. Irvin (The further theory of Francis Galton's Individual Difference Problem. Biometrika Bd. 17 Nr. 1/2, S. 100 bis 128. 1925) bestimmt dann die Verteilung der Differenzen.

Zunächst wird die mittlere Differenz zwischen dem p ten und q ten Individuum auf die unvollständige Betafunktion zurückgeführt, falls die Verteilung sich im unendlichen Gaußisch verhält. Dann werden die ersten vier Momente der gesuchten Verteilung berechnet. Dies wird für bestimmte Werte von n für $p=1$ und $p=2$ mit Hilfe einer Kubaturformel und für das Gaußsche Fehlergesetz numerisch ausgeführt. Die Verteilungsfunktion läßt sich formell anschreiben, aber die darin auftretenden Ausdrücke lassen sich nur bei ganz kleinen n und p auswerten. Daher wird eine Approximationsfunktion $y = y_0\, e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2+2xh}{\sigma^2}}$ für die Verteilung der Größendifferenz des ersten und zweiten und des zweiten und dritten Individuums aufgestellt. Ihre ersten vier Momente zeigen befriedigende Uebereinstimmung mit denjenigen der exakten Formel.

Falls die Auswahl aus Brüderpaaren besteht und die Korrelationsoberfläche für die Paare von Brüdern normal ist, und der Korrelationskoeffizient r, ist das Verhältnis der mittleren Differenz zwischen Brüderpaaren zur mittleren Differenz der Gesamtbevölkerung gleich $\sqrt{1-r}$.

Eine Ergänzung hierzu liefert Karl Pearson (On the multiple correlation of brothers. Biometrika Bd. 17 Nr. 1/2, S. 129 bis 141, 1925). Der multiple Korrelationskoeffizient einer Variablen zu n andern geht mit wachsender Zahl der Versuche, falls die verschiedenen Koeffizienten nach r gehen, selbst nach $\sqrt{r}$. Nimmt man das Pearsonsche Vererbungsgesetz an, wonach eine Generation als Gruppe gilt und die Korrelationen eines Individuums mit allen die jeweilige Gruppe symbolisierenden Individuen die gleichen sind, so erlaubt die Kenntnis paternaler und fraternaler Korrelationen und des Koeffizienten selektiver Vermischung bei stabiler Population die Bestimmung der multiplen Regressionsgleichung ohne Bestimmung individueller Ahnenkorrelation. Mangel an Angaben erlaubt bisher keine praktische Auswertung dieser Sätze.

Form der Korrelationsoberfläche. Wenn bei zwei Variablen x und y für die Regressionslinien $\bar{x}=f_1(y)$ und $\bar{y}=f_2(x)$ und für die Verteilungen der einen Variablen für ein bestimmtes Intervall der andern und die umgekehrte Beziehung bestimmte Bedingungen vorgeschrieben sind, so interessiert, welche funktionelle Form die Häufigkeit z des Paares xy annehmen kann. Dies untersucht Seimatsu Narumi (On the general forms of bivariate frequency distributions which are mathematically possible, when regression and variation are subjected to limiting conditions. Biometrika Bd. 15, Tl. 1/2, S. 77 bis 88, 1923).

Wenn alle Verteilungen der einen Variablen für bestimmte Werte der anderen dieselbe Form, aber natürlich nicht denselben Umfang haben, heißen sie vollständig homoscedastisch. Die Aequifrequenzkurven sind dann ähnlich

und ähnlich gelegen. Die allgemeine Gleichung der Korrelationsoberfläche hat die Form $z = \Phi_1(y)\,\Psi_1[x - f_1(y)] = \Phi_2(x)\,\Psi_2[y - f_2(x)]$, wo die Φ und Ψ willkürliche Funktionen sind. Es werden nun Spezialfälle untersucht:

1. Wenn die Korrelationsrate von x zu y gleich null ist, d. h. die Regressionslinie $f_1(y)$ konstant ist, dann ist entweder der Korrelationskoeffizient gleich null, d. h. z das Produkt einer Funktion, die nur von x abhängt, und einer Funktion, die nur von y abhängt, oder die andere Regression und die andere Korrelationsrate ist beliebig. Dann müssen die Verteilungen der y für gegebene x Exponentialkurven oder heteroscedastisch sein.

2. Wenn die beiden Regressionslinien linear sind, dann gilt entweder wieder Fall 1 oder man bekommt die übliche normale Korrelationsoberfläche oder vollständig positive Korrelation.

3. Wenn $\frac{\psi_1'''}{\psi_1''} =$ konstant, wobei $\psi_1 = \lg \Psi_1$, so sind im allgemeinen Fall die Regressionskurven rechtwinklige Hyperbeln und die Verteilungskurven fallen unter den Pearsonschen Typus III. Als Spezialfall tritt die normale Korrelationsoberfläche auf und der Fall, daß die eine Regression exponentiell, die andere logarithmisch ist.

Im Gegensatz hierzu stehen die Fälle, wo die Verteilungen der einzelnen Reihen erst durch Reduktion auf variable Maßstäbe homoscedastisch werden. Sind die Regressionskurven und die dabei notwendigen multiplikativen Faktoren linear, so sind im allgemeinen Fall die beiden Reihenverteilungen vom Typus I, in einem Spezialfall ist die eine vom Typus III, die andere vom Typus VI.

Es zeigt sich also, daß es gar nicht so viele mögliche Oberflächen gibt. Man kann nicht etwa beliebige Regressionslinien mit beliebigen Verteilungen der Variablen kombinieren.

Räumliche und flächenhafte Verteilung. In verschiedenen menschlichen Organen finden sich zahlreiche Korpuskeln von etwa kugelförmiger Gestalt. Ein Schnitt durch das betreffende Organ erlaubt die Verteilung der so ausgeschnittenen Kreise nach ihrer Größe aufzustellen. Es fragt sich, wie hieraus die Größenverteilung der Kugeln und insbesondere der mittlere Radius abgeleitet werden kann. Im allgemeinen werden die Kreisdurchmesser kleiner sein als die Kugeldurchmesser, anderseits werden größere Kugeln häufiger geschnitten als kleinere. Herr S. D. Wicksell (The corpuscular problem, Biometrika Bd. 17 H. 1 u. 2, 1925) zeigt, daß die räumliche Größenverteilungsfunktion sich aus der flächenhaften mit Hilfe einer Abelschen Integralgleichung berechnen läßt und daß diese Beziehung auch für Ellipsoide gilt. Nur die Maxwellsche Verteilung kann danach gleichzeitig die Verteilung der Kugeln wie der Kreise sein. Wenn also die Kugeln bezw. Kreise zufällig oder gleichmäßig verteilt sind, sind es die Kreise bzw. Kugeln nicht. Die Lösung der Integralgleichung erlaubt auch die Aufstellung der räumlichen Verteilung für den wohl häufigsten Fall, daß die beobachtete Größenverteilung nicht analytisch, sondern nur numerisch gegeben ist. Man drückt hierzu den in der Lösung der Integralgleichung auftretenden Differentialquotienten durch die Differenzenquotienten aus. Eine andere Methode drückt das $n$te Moment der gesuchten räumlichen Verteilung durch das $n-1$te der beobachteten Flächenverteilung aus. Das arithmetische Mittel der gesuchten Durchmesser ist gleich $\frac{\pi}{2}$ mal dem harmonischen Mittel der scheinbaren Durchmesser. Für den statistisch ungeschulten Anatomen wird endlich eine dritte Lösung gegeben, welche die Häufigkeit der einzelnen Klassen der gesuchten Verteilung als Funktion der Häufigkeiten der beobachteten Verteilung ausdrückt. Dieselbe Integralgleichung tritt auch in der Stellarstatistik auf. Hier ist beobachtet die Projektion eines Sternhaufens auf die photographische Platte und damit die Lagenverteilung in der Ebene, gesucht wird die wahre Lagenverteilung im Raum.

Die Wicksellsche Arbeit wird zweifellos auch für die Fragen von Bedeutung sein, auf die man heute bei der Erforschung der Struktur der Materie vielfach geführt wird.

Statistik der Sterne. Die astronomischen Beobachtungen liefern ein immenses Material, das mit statistischen Methoden ausgebeutet wird. So werden die Verteilung der Sterne über das Firmament überhaupt, die Verteilung nach der Helligkeit oder nach ihrer Geschwindigkeit untersucht. Immer wieder tritt hierbei das Gaußsche Fehlergesetz auf, dessen überragende Bedeutung uns aus der Statistik bekannt ist. In erster Näherung kann man für die nächsten Sterne annehmen, daß sie gleichmäßig über den Raum verteilt sind. Die Verteilung der Sterne nach ihrer absoluten Größe ist, wie Kapteyn gezeigt hat, Gaußisch; ebenso, wie Schwarzschild gezeigt hat, die Verteilung nach dem Logarithmus der Geschwindigkeit. Somit läßt sich die Zahl der Sterne von bestimmter Entfernung, bestimmter absoluter Größe und bestimmter Geschwindigkeit angeben. Auf Grund dessen untersucht Herr Willem J. Luyten (»Note on some statistical consequences of the luminosity law.« Proc. Nat. Acad. America 10, S. 260 bis 264, 1924, Nr. 6) die Verteilung der Sterne nach einer Funktion H, die gleich der absoluten Größe $+5$ mal dem Logarithmus der Geschwindigkeit ist. Dabei werden nur Sterne betrachtet, deren Größe und Geschwindigkeit über einem gewissen Betrag liegen. Dies führt zu einem aus zwei analytisch verschieden gearteten Teilen bestehenden Verteilungsgesetz. Beide sind zwar Gaußisch, aber die je zwei dabei auftretenden Konstanten sind verschieden. Zur praktischen Verwendung muß man also, damit die beiden Teile aufeinanderpassen, den einen Kurvenzug noch mit einer Konstanten multiplizieren. Das Maximum ist sehr spitz. Nur in einem Spezialfall wird die Kurve symmetrisch. Vier Vergleiche dieser theoretischen

Verteilung mit 100 bis 200 Sternen im Greenwicher Sternkatalog für verschiedene Minimalwerte der Größe und Geschwindigkeit ergeben eine befriedigende Uebereinstimmung.

Die Verteilung der Gattungen. In Fauna und Flora gelten, abgesehen von gewissen Schwankungen, folgende drei eigentümliche Verteilungen: Die Zahl der Gattungen ist um so größer, je geringer die Zahl der Arten, die sie enthalten. Die Verteilung ist also einseitig und hat ein Maximum am Anfang. Die Zahl der Arten, die nur auf einem engen Gebiet vorkommen, ist größer als diejenigen, die auf einem größeren Gebiet vorkommen. Endlich besteht eine mehr oder minder enge Korrelation zwischen dem Ausdehnungsgebiet und der Zahl der Arten einer Gattung. Die weniger verbreiteten Gattungen sind die jüngeren. Dieses reziproke Verhalten von Arten und Gattungen findet J. C. Chamberlin (Concerning the hollow curve of distribution, Amer. Naturalist Bd. 58 Nr. 657, S. 350 bis 374, 1924) an den Coccidae, an Linnés Katalog der Würmer, der Insekten, der Säugetiere und Vögel zusammengenommen, der Amphibien, Reptilien und Fische zusammengenommen, an allen Tieren Linnés, an Millers Katalog der Säugetiere Westeuropas und an den Coniferen bestätigt. Die Kurven sind zwar ziemlich unregelmäßig, weisen aber doch den prinzipiell gleichen Verlauf auf. Die Zahl der Gattungen mit nur einer Art ist umgekehrt proportional der Zahl aller Arten in der betreffenden Familie. Zu beachten ist allerdings, daß unsere Einteilung in Gattungen und Arten nur subjektiv ist, vielleicht keine wirkliche Bedeutung im Sinne der Natur hat, und daß wir manche Arten überhaupt noch nicht als solche festgestellt haben, was zu einer Ueberschätzung der Gattungen mit nur wenig Arten führt.

Invaliditätstafeln. Man betrachte eine Gesamtheit von Individuen, welche eine bestimmte Anzahl von im Laufe der Zeit verlierbaren und wiedererwerbbaren Merkmalen besitzen. Diese Merkmale sollen nur einzeln verloren werden können. Ihr Verlust bedeutet Austritt aus der ursprünglichen und Eintritt in eine neue Gesamtheit. Die Individuen der neuen Gesamtheit können aber dann wieder in die alte zurückkehren.

E. Schönbaum (Anwendung der Volterraschen Integralgleichungen in der mathematischen Statistik, Skandinavisk Aktuarie Tidskrift, Upsala 1924, H. 4, 246 bis 265, 1925, H. 1, 1 bis 22) untersucht die unter diesen Bedingungen vorhandene Zahl der Individuen jeder Gesamtheit als Funktion der Zeit.

Versicherungstechnisch interessiert hauptsächlich der Zerfall einer Gesamtheit von aktiven $x$jährigen $l_a(x)$ unter der Wirkung von Sterblichkeit, Invalidität und Reaktivierung. Die Sterbensintensität $\mu_a(x)$ und Invaliditätsintensität $r(x)$ der Aktiven soll zunächst nur vom Alter x, die Sterbensintensität $\mu_i(x, \xi)$ und die Reaktivierungsintensität $\rho(x, \xi)$ der Invaliden vom Alter x und dem Alter bei der Invalidisierung ξ, also auch von der Dauer der Invalidität abhängen. Eine Person soll mehrmals invalid und reaktiviert werden können. Die reaktivierten Personen sollen der gleichen Sterblichkeit und Invalidität unterliegen, wie die aktiv gebliebenen. Demnach ist die Kenntnis von vier Intensitätsfunktionen notwendig.

Die Bestimmung der Zahl der Aktiven $l_a(x)$ und Invaliden $l_i(x)$ als Funktion des Alters geht zunächst genau so vor sich, wie die übliche elementare Bestimmung der Ueberlebenden aus der Sterbensintensität. Aber zu den gewöhnlichen logarithmischen Differentialquotienten kommt durch die Reaktivierten ein Integralausdruck hinzu. Daher ergibt sich die Zahl der Aktiven vom Alter x aus einer Integro-Differentialgleichung erster Ordnung von Volterraschem Typ,

$$\frac{d\, l_a(x)}{d\, x} = l_a(x) \cdot f(x) + \int_\alpha^x l_a(\xi)\, H(x, \xi)\, d\xi ,$$

wobei $f(x)$ und $H(x, \xi)$ Funktionen sind, die sich aus den vier Intensitätsfunktionen in einfacher Weise zusammensetzen. Diese Gleichung läßt sich leicht auf eine Volterrasche Integralgleichung zweiter Art überführen. Die Zahl der aktiven $x$jährigen ergibt sich als Lösung von

$$l_a(x) = l_a(\alpha) + \int_\alpha^x k(x, \xi)\, l_a(\xi)\, d\xi ,$$

wobei der Kern

$$k(x, \xi) = f(\xi) + \int_\alpha^x H(x, \xi)\, dx .$$

Die Zahl der Inaktiven ergibt sich dann aus

$$l_i(x) = \int_\alpha^x l_a(x)\, r(\xi)\, p_i(x, \xi)\, d\xi ,$$

wobei $p_i(x, \xi)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein inaktiver ξjähriger inaktiv das Alter x erreicht. Diese Gleichungen werden dann nach der Volterraschen Methode behandelt.

Aber auch die ursprüngliche Integro-Differentialgleichung läßt schrittweise Lösungen zu. Als erste Lösung erhält man eine Dekremententafel ohne Reaktivierung. Die zweite Näherung gibt noch die Zahl derer, welche einmal invalid und nachher reaktiviert wurden, die dritte außerdem die Anzahl derer, welche invalid, reaktiviert, wieder invalid und wieder reaktiviert worden sind und nachher das Alter x als Aktive überlebt haben. Bei der raschen Konvergenz genügt es, die ersten zwei Glieder dieser Reihe zu betrachten.

Die bisher in der Versicherungstechnik üblichen Lösungen sind Spezialfälle. Nimmt man an, daß Sterblichkeit und Reaktivierung bloß vom Alter abhängen, so erhält man eine Riccatische Gleichung. Schließt man die Möglichkeit einer Reaktivierung aus, eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Nach dieser Formel sind die bisherigen Tafeln konstruiert.

Diese Methoden lassen sich auch auf eine offene Gesamtheit anwenden, falls man die Intensität des Ein- und Austritts kennt. Auf einen ähnlichen Volterraschen Typus führt auch

die Annahme, daß die Reaktivierten eine andere Sterblichkeit und Invalidität besitzen, als die aktiv Gebliebenen.

Zuletzt wird das allgemeine Problem behandelt: aus einer Grundgesamtheit von Individuen mit n Merkmalen treten im Laufe der Zeit die Individuen infolge Verlustes eines Merkmals aus und kehren zurück, sobald sie das verlorene Merkmal wieder erworben haben. Gesucht die Zahl der Individuen zur Zeit t, falls die Verlustintensitäten $\eta_\nu(t, \tau)$ $(\nu = 1, 2 \ldots n)$ von der Zeit t und der Dauer der Angehörigkeit zur Grundgesamtheit τ, die Rückkehrintensitäten $\varphi_\nu(t, u)$ von der Zeit t und der Dauer der Zugehörigkeit zur neuen Gesamtheit u abhängen. Dies führt auf eine Integro-Differentialgleichung

$$\frac{\partial l(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial l(t, \tau)}{\partial \tau} = l(t, \tau)\, \eta(t, \tau) + \int_\tau^t l(\xi, \tau)\, \beta(\xi, t, \tau)\, d\xi ,$$

wobei $\eta(t, \tau)$ die Summe der Intensitäten des Verlustes der Eigenschaften ν, $\beta(\xi, t, \tau)$ die Summe der Verlust- multipliziert mit den Rückkehrintensitäten und den Wahrscheinlichkeiten, daß ein Individuum nach Verlust des Merkmals ν beim Alter ξ zur Zeit t noch ohne dieses Merkmal ist.

Diese Gleichung wird mit Hilfe des Dirichletschen Satzes in eine Integralgleichung verwandelt, welche ebenfalls nach der für die Volterraschen Integralgleichungen üblichen Methode aufgelöst werden kann.

Reaktionszeiten verschiedener Sinne. Hängt die Reaktionszeit von der Sinnesschärfe oder hängen verschiedene Reaktionszeiten untereinander ab, so daß die Reaktionszeit nicht physisch, sondern psychisch bedingt ist? Abgesehen von experimentellen Schwierigkeiten kompliziert sich die Beantwortung dieser Frage dadurch, daß Reaktionszeit wie Sinnesschärfe vom Alter abhängen. In Biometrika, Bd. 15 Nr. 3/4 berichten Y. Koga und G. M. Morant über Messungen an 3379 Männern, die vom Galton-Laboratorium vorgenommen worden waren.

Die Korrelation zwischen dem höchsten gehörten Ton bezw. der Sehschärfe und dem Alter ist $-0{,}61$ bezw. $-0{,}31$. Aber die Abnahme der Schärfe mit dem Alter geht nicht gleichmäßig vor sich. Die höchste Sehschärfe bezw. Hörschärfe wird vielmehr erst mit etwa 20 bezw. 25 Jahren erreicht. Die Regressionsgleichungen erlauben eine Reduktion der Beobachtungen auf ein gemeinsames Alter. Aber die Regression ist in all diesen Fällen nicht linear. Man berechnet daher die beiden Korrelationsraten. Der Koeffizient des Zusammenhangs zwischen der Reaktionszeit beim Hören und Sehen und dem Alter ist so ziemlich Null, die Rate 0,24 bezw. 0,20.

Das Minimum der Reaktionszeit wird in beiden Fällen bei etwa 25 Jahren erreicht. Die Reaktionszeit beim Hören ist immer geringer als beim Sehen.

Berechnet man die Schwankungen bei dem höchst gehörten Ton, die Sehschärfe und die Reaktionszeiten mit und ohne Alterskorrektur, so ergibt sich, daß die Schwankungen der Sehschärfe doppelt so groß sind wie die der Hörschärfe. Die mittlere Seh- und Gehörschärfe wird durch Altersreduktion wesentlich geändert. Nicht aber die Reaktionszeit. Für den Zusammenhang zwischen Hör- und Sehschärfe sind die Raten und der Koeffizient etwa von der Ordnung 0,3 und verschwinden annähernd nach Reduktion auf gemeinsame Alter, bei Schärfe und Reaktionszeit des Gehörs und Gesichts betragen sie etwa 0,1. Dagegen sind die Zusammenhänge zwischen den Reaktionszeiten des Gehörs und Gesichts 0,5. Und die Altersreduktion hat in beiden Fällen keinen Einfluß.

Die Reaktionszeiten hängen also wenig von der Sinnesschärfe ab, stehen aber untereinander in wesentlichem Zusammenhang.

Wirtschaftskurven der Inflation. Die Konjunkturkunde ist in Amerika eine ausgedehnte Wissenschaft mit großem Apparat, während wir hier erst Ansätze aufzuweisen haben. In zwei Artikeln (»Indexkurven für die Braunkohlenwirtschaft« und »Die Wirtschaftskurven der deutschen Inflationszeit«) referiert H. Hennig im Braunkohlenarchiv, Heft 9, Halle 1925, zunächst über die Methoden des »Harvard University Committee on Economic Research«.

Zur Darstellung des Verlaufs der Inflation wird wie üblich ein logarithmisches Koordinatensystem verwendet und ein hyperbolischer Verlauf in diesem System angenommen. Die zwei auftretenden Konstanten werden durch den Wert vom März 1921 und durch den Endwert festgelegt. Hier wäre zunächst eine systematische Bestimmung, etwa mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate besser. Darüber hinaus ist zu beachten, daß es überhaupt nicht eine einheitliche Entwicklung der »Inflation« gegeben hat, vielmehr sind hierfür mehrere, voneinander verschiedene Variable zu untersuchen. Der Verlauf des Dollars, des Großhandelsindex, des Geldumlaufs, des Kleinhandelsindex usw. sind nämlich dadurch gekennzeichnet, daß zwischen ihnen Phasenverschiebungen bestehen. Die Phasenverschiebungen nehmen mit der Zeit ab. Die Inflation hört auf, sobald die Phasenverschiebung Null, also keine Inflationsgewinnler mehr existieren, bezw. wenn bereits zu einer fiktiven oder realen Rechnung in Goldwährung übergegangen wird. Es ist also wirtschaftlich falsch und daher statistisch verkehrt, nur eine Inflationsgleichung, vom Autor Hilfsniveaulinie genannt, anzusetzen. Der Autor dividiert nun die verschiedenen Meßziffern durch seine Hilfsniveaulinie und nennt die Resultate rektifizierte Wirtschaftskurven. Die Behauptung, daß am 11. April 1924 10 Uhr Nachmittag 41 Minuten und $36^1/_4$ Sekunden die Kurve unstetig geworden wäre, also der absolute wirtschaftliche Zusammenbruch eingetroffen wäre, wenn die Inflation nicht am 20. November 1923 aufgehört hätte, ist wohl sinnlos.

Heidelberg. E. J. Gumbel. 705

KLEINE MITTEILUNGEN

Numerische Integration der Hauptgleichung der äußeren Ballistik. Die Hauptgleichung der äußeren Ballistik läßt sich auf die Form bringen $\frac{dw}{dz} = \text{Tg}\, z + F(w)$, wo $F(w)$ eine Luftverzögerungsfunktion bedeutet, die meistens empirisch gegeben ist. Es ist $w = \lg v$, wo v die Geschoßgeschwindigkeit bedeutet und $\text{Tg}\, z = \sin \vartheta$, wo ϑ den Neigungswinkel der Geschoßbahntangente gegen die Horizontale bedeutet.

Für 10 cm - Kruppsche Normalgeschosse mit $P = 10$ kg; $R^2 \pi = 50$ cm²; $v_0 = 600$ m/s; $\vartheta_0 = 30^0$; $\delta = 1{,}22$ kg/m³ gilt folgende Tabelle. (Sie ist Cranz, Lehrbuch der Ballistik I, Berlin 1925, Julius Springer, entnommen und durch Interpolation auf äquidistante w-Werte gebracht.) [Vergl. nebenstehende $F(w)$-Tabelle.]

Das Verfahren der Näherungsfolgen liefert zur Integration der Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\text{Tg}\, z + F(w)}$$

den Ansatz $z_2 = z_0 + \int\limits_{w_0}^{w} \frac{dw}{\text{Tg}\, z_1 + F(u)}$.

Als erste Näherung z_1 nehmen wir die Gerade $z_1 = z_0 + \frac{w - w_0}{\text{Tg}\, z_0 + F(w_0)}$. Mit z_2 als zweite Näherung kann man eine dritte Näherung z_3 erhalten usw.

Dies Verfahren konvergiert um so besser, je kleiner $\text{Tg}\, z$, im Vergleich zu $F(w)$ ist, also ist die Konvergenz besonders gut für den Anfang der gesuchten Integralkurve $z = z(w)$. Für mittlere Werte w (im nachfolgenden Beispiel etwa von $w = 5{,}6$ ab) wird die Konvergenz schlechter. Um die Integration dennoch fortsetzen zu können, kehren wir das Verfahren um und betrachten w als Funktion von z.

$$\frac{dw}{dz} = \text{Tg}\, z + F(w);$$

$$w_2 = w_0 + \int\limits_{z_0}^{z} [\text{Tg}\, z + F(w_1)]\, dz\,.$$

Als erste Näherung w_1 nehmen wir die Funktion $w_1 = w_0 + [\text{Tg}\, z_0 + F(w_0)]\,(z - z_0)$,

$F(w)$ - Tabelle.

w	$F(w)$	$\Delta F(w)$
6,4	6,933	1,076
6,3	5,857	1,001
6,2	4,856	0,905
6,1	3,951	0,812
6,0	3,139	0,794
5,9	2,345	1,033
5,8	1,312	0,624
5,7	0,688	0,208
5,60	0,480	13
5,59	467	13
5,58	454	13
5,57	441	13
5,56	428	10
5,55	418	11
5,54	407	10
5,53	397	10
5,52	387	9
5,51	378	9
5,50	369	8
5,49	361	8
5,48	353	8
5,47	345	8
5,46	337	8
5,45	329	8
5,44	321	6
5,43	315	7
5,42	308	6
5,41	302	7
5,40	295	

wo wir aber jetzt von $z_0\, w_0$ ausgehend nur einen Schritt weiter gehen bis $z_1\, w_1$, dann $\text{Tg}\, z_1 + F(w_1)$ bilden und erst nun $z_1\, w_1$ als neuen Ausgangspunkt wählend bis $z_2\, w_2$ fortschreiten usw. Auf die erste Näherung ist etwas mehr Sorgfalt zu verwenden, weil die Konvergenz des Verfahrens zunächst nur noch schwach ist, da $\text{Tg}\, z$ und $F(w)$ etwa gleiche Größenordnung haben. Bald überwiegt aber $\text{Tg}\, z$ und dann wird die Konvergenz wieder besser. Verfolgen wir nun das Beispiel der Tabelle. Vom Punkte $z_0 = 0{,}55$, $w_0 = 6{,}4$, entsprechend $\vartheta_0 = 30^0$ und $v_0 = 600$ m/sec., gehen wir aus.

w	$F(w)$	z_1	$\text{Tg}\, z_1$	$\text{Tg}\, z_1 + F(w)$	$\frac{1}{\text{Tg}\, z_1 + F(w)}$	z_2	$\text{Tg}\, z_2$	$\text{Tg}\, z_2 + F(w)$	$\frac{1}{\text{Tg}\, z_2 + F(w)}$	z_3
6,4	6,933	0,5493	0,500	7,433	0,1345	0,5493	0,500	7,433	0,1345	0,5493
6,3	5,857	5358	490	6,347	1576	5347				
6,2	4,856	5224	479	5,335	1874	5176	476	5,332	0,1875	
6,1	3,951	5089	469	4,420	2262	4970				
6,0	3,139	4955	459	3,598	2779	4720	440	3,579	0,2794	0,4718

Die erste Integration über dem Intervall $w = 6{,}4$ bis $w = 6{,}3$ wird nach der speziellen Simpsonschen Regel $12 \int\limits_0^h y\, dx = h\,(5\, y_1 + 8\, y_2 - y_3)$ ausgeführt, die übrigen Integrationen erfolgen nach der einfachen Simpsonschen Regel. Um die Genauigkeit der ersten Integration abzuschätzen, wurde z_3 für $w = 6{,}0$ gebildet. Man sieht, daß die erste Integration ausreichend ist. Nun nehmen wir $w_0 = 6{,}0$; $z_0 = 0{,}4720$ als neuen Ausgangspunkt.

w	$F(w)$	z_1	Tg z_1	Tg $z_1 + F(w)$	$\frac{1}{\text{Tg } z_1 + F(u)}$	z_2	Tg z_2	Tg $z_2 + F(w)$	$\frac{1}{\text{Tg } z_2 + F(w)}$	z_3
6,0	3,139	0,4720	0,440	3,579	0,2794	0,4720	0,440	3,579	0,2794	0,4720
5,9	2,345	4441	417	2,762	3621	4402	414	2,759	3624	4402
5,8	1,312	4161	324	1,706	5862	3949	376	1,688	5924	3947
5,7	0,688	3882	370	1,058	9452	3186	308	0,996	1,0040	3158
5,6	0,480	3602	345	0,825	1,2121	2091	206	0,686	1,4577	1927

Vergleicht man die drei z-Spalten, dann sieht man, daß eine nochmalige Integration nicht nötig ist. Von nun an wird die Konvergenz des Verfahrens schlechter und wir kehren daher die Integration um. Vom Punkte $z_0 = 0{,}2$, $w_0 = 5{,}606$ (durch Interpolation gefunden) ausgehend erhalten wir:

z	w_1	$F(w_1)$	Tg z	Tg $z + F(w_1)$	w_2	$F(w_2)$	Tg $z + F(w_2)$	w_3
0,2	5,606	0,492	0,197	0,689	5,606	0,492	0,689	5,606
0,15	5,572	0,444	0,149	0,593				
0,1	5,543	0,410	0,100	0,510	5,546	414	514	5,546
0,0	5,492	0,363	0,000	0,363	5,503	372	372	5,502
− 0,1	5,456	0,334	− 0,100	0,234	5,473	347	247	5,471
− 0,2	5,433	0,317	− 0,197	0,120	5,456	334	137	5,452

Der Wert $z = 0{,}15$ wird mitgenommen, um eine gute erste Näherung zu erhalten.

Nun wird die Konvergenz wieder besser, wir können daher größere Schritte machen.

z	w_1	$F(w_1)$	Tg z	Tg $z + F(w_1)$	w_2	$F(w_2)$	Tg $z + F(w_2)$	u_3	$F(w_3)$	Tg $z + F(w_3)$	w_4
− 0,2	5,452	0,331	− 0,197	0,134	5,452	0,331	0,134	5,452	0,331	+ 0,134	5,452
− 0,3	5,439	320	− 0,291	0,029	5,444	324	0.033	5,444	324	+ 0,033	5,444
− 0,4	5,436	319	− 0,380	− 0,061	5,446	326	− 0,054	5,445	325	− 0,055	5,445
− 0,6	5,442	323	− 0,537	− 0,214	5,461	338	− 0,199	5,459	336	− 0,201	5,459
− 0,8	5,463	339	− 0,664	− 0,325	5,529	396	− 0,268	5,520	387	− 0,277	5,521
− 1,0	5,496	366	− 0,762	− 0,396	5,588	464	− 0,298	5,564	433	− 0,329	5,568

Während in den beiden ersten Schemata spaltenweise vorgegangen werden kann, muß in den beiden letzten bis zum Doppelstrich zeilenweise vorgegangen werden.

Zur Kontrolle des Ergebnisses stellen wir die Werte, die Cranz mit Isoklinen und Integraph findet (zweite Zeile), neben die hier gefundenen (dritte Zeile). Die Uebereinstimmung ist recht gut.

$z =$	0,5494	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,00	− 0,10	− 0,20	− 0,30
$w =$	6,3969	6,115	5,814	5,689	5,608	5,545	5,502	5,470	5,452	5,445
$w =$	6,4000	6,115	5,812	5,687 ·	5,606	5,546	5,502	5,471	5,452	5,444

$z =$	− 0,50	− 0,70	− 0,80
$w =$	5,454	5,487	5,529
$w =$	5,452	5,490	5,521.

Die zu $z = 0{,}50$ bis 0,30 gehörigen w-Werte sind durch Interpolation gebildet.

Das hier erläuterte Integrationsverfahren läßt sich in einer Stunde gut durchführen, besonders dann, wenn eine Rechenmaschine zur Verfügung steht.

Die Bestimmung von Flug-Weite, -Höhe, -Zeit erfolgt nun am raschesten nach einem planimetrischen Verfahren. (Vergl. J. Groeneveld, Die Planimeter als Integrationsinstrumente, Zeitschrift für Instrumentenkunde 47, S. 126.)

Soll die Veränderlichkeit der Luftdichte mit der Höhe y berücksichtigt werden, dann betrachten wir die oben gefundene Lösung $w = w(z)$ und $y = y(z)$ als erste Näherung der Differentialgleichung

$$\frac{dw}{dz} = \text{Tg}\, z + \frac{\delta(y)}{\delta_0} F(w)\,,$$

die nun in analoger Weise zu integrieren ist.

Clausthal. J. Groeneveld. 718

Ueber die Mittlere Abszisse[1]. 1. Zur graphischen Quadratur einer vorliegenden Kurve pflegt man etwa folgendermaßen vorzugehen: Man wählt auf der Kurve eine Anzahl *Teilpunkte*, zieht durch diese die Vertikalen, *Treffvertikalen*, außerdem in jedem der entstandenen Streifen eine passend zu wählende weitere Vertikale, *Knickvertikale*. Für jede Treffvertikale konstruiert man — durch Hilfszeichnung oder instrumentell — als Verhältnis der Teilpunktsordinate zur konstanten Integrationsbasis das *Steigungsmaß* der Integralkurve. Vom auf der ersten Treffvertikalen beliebig angenommenen ersten *Treffpunkt* zieht man unter dem ersten Steigungsmaß die erste *Stützstrecke* bis zum Schnitt mit der ersten Knickvertikalen, von diesem, dem ersten *Knickpunkt* aus unter dem zweiten Steigungsmaß die zweite Stützstrecke über die im zweiten Treffpunkt geschnittene zweite Treffvertikale hinweg bis zur zweiten Knickvertikalen usw. Bei richtiger Annahme der Knickvertikalen werden die Stützstrecken Tangenten, die Treffpunkte Berührungspunkte einer Integralkurve.

Zieht man nämlich durch die Teilpunkte die Horizontalen bis zu den benachbarten Knickvertikalen, so bilden sie mit den auf den Knickvertikalen abgeschnittenen Strecken zusammen eine Treppe. Die Fläche unter dieser wird durch den Stützstreckenzug überall genau quadriert. Damit die Fläche unter der gegebenen Kurve jedesmal bis zur Treffvertikalen hierbei ebenfalls genau quadriert werde, ist solche Wahl der Knickvertikalen erforderlich, daß in jedem Streifen die Fläche unter der Treppe gleich der unter der Kurve wird. Die genaue Festlegung der Knickvertikale, die Bestimmung der *Mittleren Abszisse* würde die Kenntnis des Integrals voraussetzen; genähert läßt sie sich aber für viele Zwecke ausreichend mit einfachen Mitteln leisten.

Oft genügt es, die in gleichen Abständen von beiden Treffvertikalen gezogene *Mittelvertikale* des Streifens als Knickvertikale zu nehmen. Dieses, der Trapezregel gleichwertige, Verfahren quadriert das von den die benachbarten Teilpunkte verbindenden Sehnen begrenzte Polygon, vernachlässigt die zwischen Sehne und Kurve liegenden Segmente. Eine Berücksichtigung dieser muß durch Verschiebung der Knickvertikale aus der Mittelvertikale geschehen; ein gutes Augenmaß kann hier viel leisten. An Konstruktionen sind die der *Simpsonschen* Regel verwandten gebräuchlich. Sie beruhen auf der Ersetzbarkeit des Kurvenstückes durch einen Parabelbogen mit vertikaler oder horizontaler Achse. Diese Ersetzbarkeit braucht sich nicht auf den Verlauf der Kurve, sondern nur auf die Abhängigkeit der Segmentfläche von der der Zeichnung noch zu entnehmenden Strecke zu beziehen. Statt der gewöhnlich benutzten, innerhalb des Segments auf der Mittelvertikalen bezw. Mittelhorizontalen gelegenen, Strecke kann man auch den Abstand zwischen der Sehne und der ihr parallelen Tangente heranziehen. Diese Methode hat den Vorzug, auch für nicht orientierte Parabelsegmente genau zu sein, daher im allgemeinen bessere Annäherung zu liefern.

2. Die Knickvertikale in einem Streifen wird folgendermaßen gefunden: *Zu der die Teilpunkte verbindenden Sehne zieht man die parallele Tangente, ferner durch den Halbierungspunkt der Sehne die Horizontale bis zum Schnitt mit der Tangente, drittelt die so erhaltene Strecke und legt durch den äußeren Drittelungspunkt die Knickvertikale.*

Hier braucht man bei der Tangentenziehung den Berührungspunkt nicht; bekanntlich legt man eine Gerade vorgeschriebener Richtung ebenso genau an eine Kurve wie durch einen Punkt.

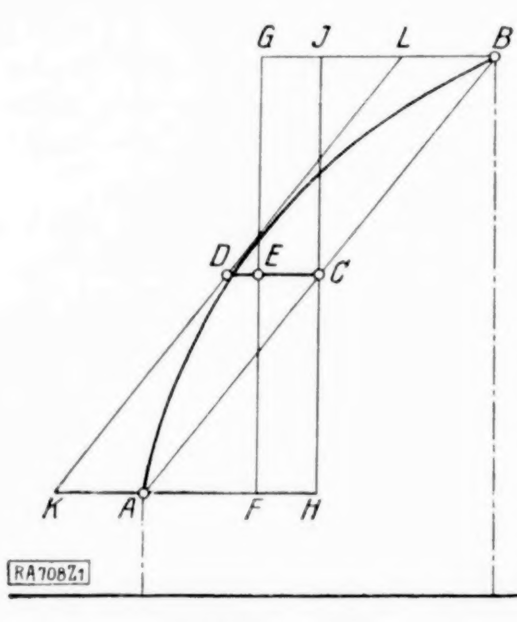


Abb. 1.

Zum Beweise legen wir außer der durch E gehenden Knickvertikalentreppe auch die durch C gehende Mittelvertikalentreppe, und bringen die Tangente mit den Teilpunktshorizontalen zum Schnitt in K und L. Dann ist der Unterschied beider Treppenflächen

$$FHJG = HJ \cdot EC = \frac{2}{3} HJ \cdot DC = \frac{2}{3} KABL$$

gleich der Fläche jedes KL berührenden Parabelsegments über der Sehne AB.

Als Beispiel diene die Inhaltsbestimmung des Kreisquadranten mit einem einzigen Teilpunkt. Die Vernachlässigung läßt sich hier leicht berechnen. Dem wahren Wert

$$J = \frac{\pi}{4} r^2 = 0{,}7854\, r^2$$

steht der Näherungswert

$$K = 2\left[\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{2}{3}\cdot 2\sin\frac{\pi}{8} \cdot\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)\right] r^2 = 0{,}7848\, r^2$$

gegenüber. Die Vernachlässigung beträgt weniger als 1 vT, liegt an der Grenze der durch Zeichnung überhaupt erreichbaren Genauigkeit.

[1] Wie Prof. v. **Mises** mir schreibt, deckt sich diese Mitteilung teilweise mit Ausführungen, die er in seinen Vorlesungen zu machen pflegt.

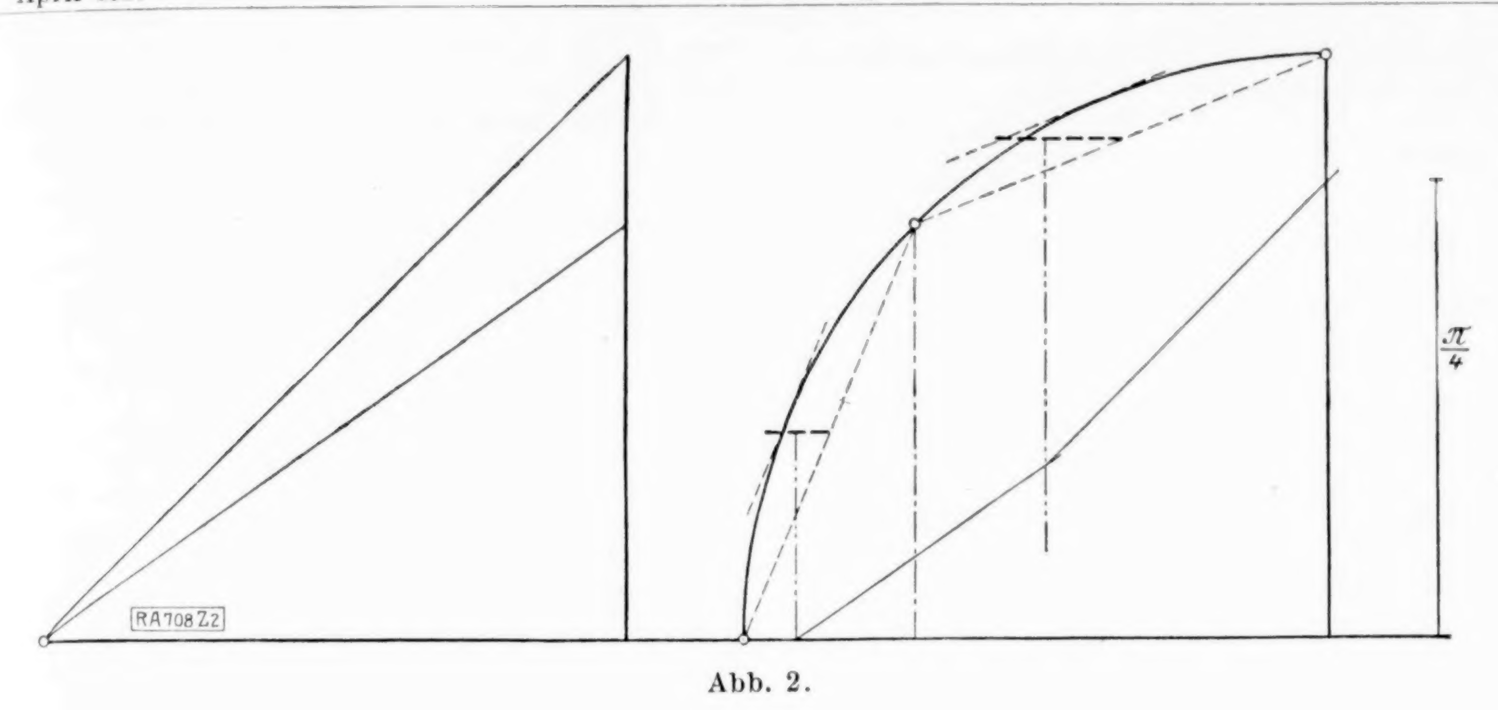


Abb. 2.

Die mit der Ersetzbarkeit durch orientierte Parabeln — hier eine vertikale und eine horizontale — arbeitende Methode, die sicher nicht weniger mühsam ist, würde rechnungsmäßig auf $0{,}7843\,r^2$ führen, mit etwa doppelt so großer Vernachlässigung. Die bequeme, die Segmente ganz vernachlässigende Methode würde den Quadranten in über 20 Stücke teilen müssen, um theoretisch gleiche Genauigkeit zu erzielen; praktisch würde sie sie wegen Häufung von Zeichnungsfehlern sicher nicht erreichen.

Die praktische Verwendung der Methode betreffend sei sogleich noch folgendes gesagt: In der Umgebung eines Wendepunktes ist es im allgemeinen leicht, eine verhältnismäßig lange Sehne so zu legen, daß die Segmente auf beiden Seiten sich nahezu aufheben; dort ist die Mittelvertikale als Knickvertikale zu nehmen. Ferner lege man auf alle Scheitel (Punkte größter oder kleinster Krümmung) Teilpunkte — sonderlich genau braucht dies aber nicht zu geschehen; ein einzelner Scheitel im Streifen nahe am Rande schadet selten merklich. Nahezu horizontale Sehnen sind zu vermeiden. Im übrigen wird man die Sehnen, wenn dabei die Winkel gegen die Kurve unter 60^0 bleiben, ungefähr gleich der halben Integrationsbasis, eher größer als kleiner nehmen dürfen, ohne befürchten zu müssen, daß die Vernachlässigungen die Zeichnungsfehler übertreffen.

3. **Für die Genauigkeitsdiskussion setzen wir voraus, daß im Streifen kein Wendepunkt und kein Scheitel liegt, daß die Krümmung also monotone Funktion der Weglänge ist; sie nehme etwa vom linken Teilpunkt A bis zum rechts benachbarten B nie zu. Von den Winkeln zwischen Kurve und Sehne ist also $\alpha \geq \beta$. Ueberhängende Bogen mit $\alpha > 90^0$ schließen wir aus.**

Wir bezeichnen den Berührungspunkt der Kurve mit **der sehnenparallelen Tangente als C, den Fußpunkt des Lotes aus C auf AB mit F, ferner die Längen $AB = s$, $CF = h$, $AF = p$.**

Wir zeigen zunächst, daß von allen erlaubten Bögen mit denselben Hauptpunkten A, B, C zur kleinsten Fläche der aus einem Kreisbogen und einer Strecke zusammengesetzte Korbbogen gehört, der als Kreis mit dem Mittelpunkt auf CF von A beginnt, als solcher über C hinausgeht und in die aus B an ihn gelegte Tangente ausläuft. Der Kurvenbogen kann nämlich bei C nicht stärker gekrümmt sein als dieser Kreis; denn da nach links die Krümmung nicht abnehmen darf, würde sonst die Kurve die Sehne schon rechts von A treffen. Sind die Krümmungen bei C gleich, so müssen zwischen C und A Kurve und Kreis zusammenfallen. Ist die Kurve bei C flacher, so liegt sie weiter links zunächst außerhalb des Kreises und kann diesen wegen der Monotonie der Krümmung vor A nicht wieder schneiden. Aehnlich folgt, daß auch rechts die Kurve außerhalb des Korbbogens verläuft. Fläche J und Winkel α und β unter dem Kurvenstück sind mindestens gleich Fläche L und Winkeln α' und β' unter dem zu den gleichen Hauptpunkten gehörigen speziellen Korbbogen. Wegen $90^0 > \alpha \geq \beta$ folgt allgemein

$$h < p \leq \frac{s}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

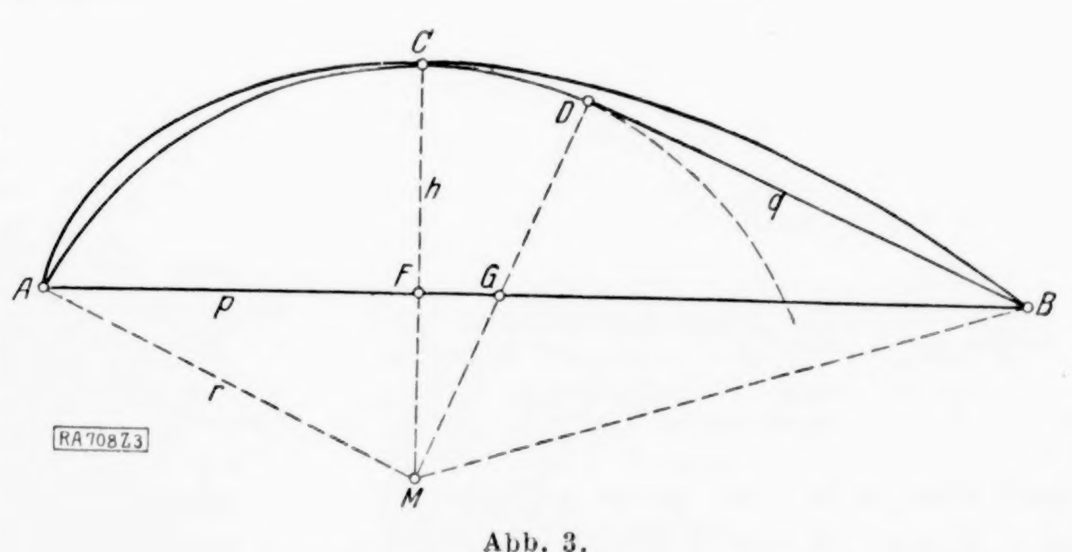


Abb. 3.

Zur Untersuchung des Korbbogens setzen wir — nur für diesen —

$$\mu = h : \frac{s}{2} \quad . . . (2), \qquad \vartheta = p : \frac{s}{2} \quad . . . (3);$$

$$\varkappa = \operatorname{tang} \frac{\alpha'}{2} \quad . . . (4), \qquad \lambda = \operatorname{tang} \frac{\beta'}{2} \quad . . . (5).$$

Aus (1) folgt

$$0 < \mu < \vartheta \leq 1 \quad . . . . (6).$$

Bezeichnen wir das geradlinige Stück DB mit q, den Radius MA mit r, so läßt sich der Figur entnehmen, daß

$$\measuredangle AMC = \alpha', \qquad \measuredangle CMD = \beta',$$

$$p = r \sin \alpha', \quad h = r(1 - \cos \alpha'), \quad q = \sqrt{s(s-2p)}$$

$$r = MG + GD = \frac{r-h}{\cos \beta'} + q \operatorname{tang} \beta',$$

$$L = MACD + MDB - MAB = \frac{r^2}{2}(\alpha' + \beta') + \frac{rq}{2} - \frac{s(r-h)}{2}.$$

Mit (3), (4), (5) wird

$$r = \vartheta \frac{1+\varkappa^2}{4\varkappa} s, \qquad q = \sqrt{1-\vartheta}\, s,$$

$$h = \frac{\vartheta \varkappa s}{2} \quad . . . . (7),$$

also

$$\mu = \vartheta \varkappa \quad . . . . (8),$$

weiter

$$\vartheta \frac{1+\varkappa^2}{4\varkappa} s = \vartheta \frac{1-\varkappa^2}{4\varkappa} s \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} + \sqrt{1-\vartheta}\, s \frac{2\lambda}{1-\lambda^2},$$

also

$$\lambda = \frac{2 - \vartheta - 2\sqrt{1-\vartheta}}{\vartheta} \varkappa \quad . . . . (9)$$

und

$$L = \left[\vartheta\left(\frac{\varkappa}{8} - \frac{1}{8\varkappa}\right) + \vartheta\sqrt{1-\vartheta}\left(\frac{1}{8\varkappa} + \frac{\varkappa}{8}\right) + \vartheta^2\left(\frac{1}{16\varkappa^2} + \frac{1}{8} + \frac{\varkappa^2}{16}\right)(\operatorname{artg} \varkappa + \operatorname{artg} \lambda)\right] s^2 \quad . . . . . (10).$$

Für dieses Korbbogensegment wollen wir nun zunächst s und h, also μ festhalten, die anderen Größen variieren. Auf einer in der unendlich kleinen Höhe δ über AB gezogenen Parallelen wird die Sehne

$$s' = s - \delta (\operatorname{cotg} \alpha' + \operatorname{cotg} \beta')$$

ausgeschnitten. Wir betrachten sie als Funktion von ϑ oder, bequemer, von

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \vartheta}.$$

Unter Heranziehung von (4), (5), (9), (8) erhalten wir

$$\operatorname{cotg} \alpha' + \operatorname{cotg} \beta' = \frac{1-\varkappa^2}{2\varkappa} + \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^3 - \mu^2}{\mu(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^2}$$

und weiter

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\operatorname{cotg} \alpha' + \operatorname{cotg} \beta') = \frac{(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^3 + \mu(1-3\varepsilon)}{\mu(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^3}.$$

Wegen (6) ist

$$(1-\varepsilon)(1+\varepsilon) > \mu,$$

also

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\operatorname{cotg} \alpha' + \operatorname{cotg} \beta') > \frac{\mu^2(1+\varepsilon) + \mu(1-3\varepsilon)}{\mu(1-\varepsilon)^2(1+\varepsilon)^3}$$

$$= \frac{2\mu}{(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)^3} > 0.$$

Mit wachsendem p nimmt nun ϑ zu, ε ab, $(\operatorname{cotg} \alpha' + \operatorname{cotg} \beta')$ ab, s' zu. Die unendlich nahe über AB gelegene Sehne s' ist also in dem zu größerem p gehörigen Segment größer. Würden weiter oberhalb die Sehnen wieder gleich, so würde sich ebenso zeigen lassen, daß unmittelbar über den gleichen Sehnen wieder dieselbe Ungleichung gilt. Bei festgehaltenem s und h wächst also L mit p.

Die Fläche J unter einem beliebigen erlaubten Kurvenstück ist mindestens gleich dem zu gleichem s, h, p gehörigen Korbbogensegment, dessen $\alpha' \leq \alpha$; dieses ist mindestens gleich dem Korbbogensegment, das in s, h, α mit J übereinstimmt, da größeres α' wegen (8) kleineres ϑ, d. h. p bedeutet. Von den zu gleichem s, h, α gehörigen Segmenten ist das Korbbogensegment L, für das jetzt dauernd

$$\varkappa = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} \quad . . . . (11),$$

an Stelle von (4) tritt, das kleinste, ein Ueberschuß des zur Näherung benutzten Parabelsegments K über J ist also mindestens gleich dem Ueberschuß von K über L.

Mit (7) wird

$$K = \frac{2}{3} h s = \frac{1}{3} \vartheta \varkappa s^2 \quad . . . . . (12),$$

also mit (10) und (9)

$$f(\varkappa, \vartheta) \equiv \frac{K-L}{s^2} = \vartheta\left(\frac{1}{8\varkappa} + \frac{5\varkappa}{24}\right) - \vartheta\sqrt{1-\vartheta}\left(\frac{1}{8\varkappa} + \frac{\varkappa}{8}\right) - \vartheta^2\left(\frac{1}{16\varkappa^2} + \frac{1}{8} + \frac{\varkappa^2}{16}\right)\left(\operatorname{artg}\varkappa + \operatorname{artg}\frac{2-\vartheta-2\sqrt{1-\vartheta}}{\vartheta}\varkappa\right) \quad (13).$$

Bei festem $\varkappa$ macht ein bestimmter ϑ-Wert, der bei variablem $\varkappa$ Funktion von $\varkappa$ wird, $f(\varkappa, \vartheta)$ zum Maximum. Setzen wir in diesem Sinne

$$f(\varkappa) \equiv \operatorname{Max} f(\varkappa, \vartheta) \quad . . . . . (14),$$

so ist stets

$$K - J \leq f(\varkappa) s^2 \quad . . . . (15).$$

In Fig. 4 ist $f(\varkappa)$ als Funktion von α dargestellt, außerdem die durch Reihenentwicklung zu erhaltende Näherungsfunktion

$$f(\varkappa) \approx 0{,}015\, \alpha \quad . . . . (16).$$

Aus der Monotonie der Krümmung läßt sich andererseits folgern, daß von allen erlaubten Bögen mit denselben Hauptpunkten A, B, C und Winkel α zur größten Fläche der aus zwei Kreisen zusammengesetzte Korbbogen gehört, der als Kreis mit dem Mittelpunkt auf CF von B beginnt, als solcher über C hinausgeht und in den berührenden unter α in A einfallenden Kreis ausläuft. Die Fläche unter ihm läßt sich ähnlich wie L, wenn auch umständlicher, aus fünf elementar zu berechnenden Stücken zusammensetzen. Der durch

s^2 dividierte Ueberschuß über K hängt außer von α noch von ϑ und μ ab. Variieren dieser Parameter liefert das Maximum als Funktion von α. Diese Funktion verläuft zunächst ziemlich geradlinig unter $f(\varkappa)$, geht bei etwa 50° in $g(\varkappa)$ über, welches den Ueberschuß des größten bei bestimmten s und α überhaupt erlaubten, nämlich des unter dem Kreisbogen mit $\beta = \alpha$, $\vartheta = 1$ gelegenen Segmentes M darstellt. Durch Einsetzen findet man aus (10)

$$M = \left[\left(\frac{1}{8\varkappa^2} + \frac{1}{4} + \frac{\varkappa^2}{8}\right)\operatorname{artg}\varkappa - \frac{1}{8\varkappa} + \frac{\varkappa}{8}\right] s^2 \quad (17)$$

und

$$g(\varkappa) \equiv \frac{M-K}{s^2} = \left(\frac{1}{8\varkappa^2} + \frac{1}{4} + \frac{\varkappa^2}{8}\right)\operatorname{artg}\varkappa - \frac{1}{8\varkappa} - \frac{5\varkappa}{24} \approx \frac{1}{15}\varkappa^3 \quad \ldots\ldots\ldots (18).$$

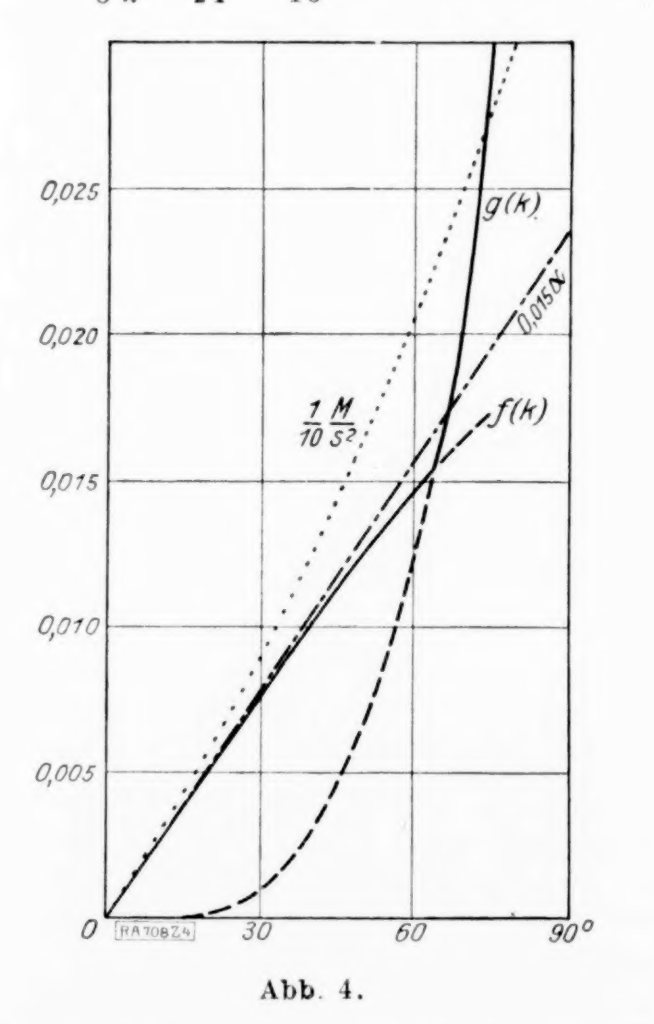


Abb. 4.

Wie die Figur zeigt, bleibt bis $\alpha = 66°$ auch $g(\varkappa)$ unter $0{,}015\,\alpha$. Geht man zu Gradmaß über, so ergibt sich abgerundet als bis zu dieser Grenze brauchbare Fehlerabschätzung

$$|J - K| < \frac{\alpha}{4000^0} s^2 \quad \ldots\ldots (19).$$

In der Regel wird die Vernachlässigung nur einen kleinen Teil dieses Betrages ausmachen.

Die Methode wird die günstigsten Resultate liefern, wenn die Vernachlässigungen von der Größenordnung der Zeichnungsfehler werden, da ein stärkeres Herabdrücken der Vernachlässigung eine größere Anzahl von Teilpunkten, also Häufung von Zeichnungsfehlern im Gefolge hätte. Ist die Integrationsbasis b (z. B. 10 cm), die Zeichnungsschärfe δ (z. B. 0,01 cm), so wird man bei ungünstigster Annahme über die Vernachlässigungen

$$b\,\delta \approx 0{,}00025\,\alpha^0 s^2$$

nehmen, was bei obigen Werten zu

$$s \approx \frac{2}{\sqrt{\alpha^0}}\,b,$$

mindestens

$$s \approx \frac{b}{4}$$

führte. Daß man dabei immer an die obere Grenze 66° für den Winkel zwischen Kurve und Sehne herankäme und daß die Vernachlässigungen immer den größten möglichen Wert erreichten, ist aber nicht anzunehmen, so wird die am Schlusse von Nr. 2 gegebene Anweisung wohl dem Optimum meist wesentlich näher kommen.

Greifswald. C. Thaer. 708

Ueber graphische Rechentafeln mit einer frei beweglichen Leiter. Die Rechentafeln mit einem beweglichen Blatt, das wie auch das Grundblatt bezifferte Punkt- oder Linienscharen trägt, kann man folgendermaßen einteilen:

1. Das bewegliche Blatt hat mit dem Grundblatt stets einen für beide Blätter festen Punkt im Endlichen gemeinsam, wird also nur um denselben Punkt gedreht: Tafeln mit drehbarem Blatt.

2. Das bewegliche Blatt hat mit dem Grundblatt stets eine für beide Blätter feste Richtung (einen unendlich fernen Punkt) gemeinsam, wird also nur in beliebigen Richtungen verschoben: Tafeln mit verschiebbarem Blatt.

3. Das bewegliche Blatt wird auf dem Grundblatt frei bewegt: Tafeln mit frei beweglichem Blatt.

Diese Dreiteilung ist vom Standpunkt der Praxis aus getroffen; mathematisch lassen sich natürlich die Gruppen 1 und 2 als Sonderfälle der Gruppe 3 auffassen.

Der ehrwürdigste Vertreter der ersten Gruppe ist das ebene Astrolabium, mit dem man Aufgaben der Kugeldreiecksrechnung löste. Schon bei diesem Gerät, mehr noch aber bei anderen »Rechenscheiben« alter und neuer Zeit, hat man die Anzahl der um denselben Punkt drehbaren Blätter vermehrt.

Zur Gruppe der Tafeln mit Schiebeblatt gehören zunächst die mancherlei eindimensionalen Rechenschieber. Auch hier hat man, wie bei den Tafeln mit drehbarem Blatt, die Zahl der beweglichen Teile (Zungen) vermehrt. Von den zweidimensionalen Rechenschiebern, für die ich die Bezeichnung »Flächenschieber« vorgeschlagen habe, war in dieser Zeitschrift wiederholt die Rede[1]).

[1]) Diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 182 bis 184, S. 254 bis 267, Bd. 6 (1926), S. 327 bis 329. Ueber einen Flächenschieber zur Eisenbetonrechnung, der mit einer einzigen Einstellung 3 simultane Gleichungen mit 7 Variablen löst, vergleiche man P. Luckey, Beton und Eisen, 1926, Heft 5, S. 95-97.

Als Anwendungen des dritten, allgemeinen Falls kann man wohl bisher nur diejenigen besonderen Formen aufweisen, bei denen zwei (einfach oder mehrfach) bezifferte Punkte des beweglichen Blattes mit zwei ebensolchen Punkten des Grundblattes zur Koinzidenz kommen. Die Ablesung bei diesen Rechentafeln, denen bei zweifacher Bezifferung jedes Punktes die Schlüsselgleichung

$$(f_{12}-f_{34})^2+(g_{12}-g_{34})^2=(f_{56}-f_{78})^2+(g_{56}-g_{78})^2$$

zukommt, läßt sich auch durch Streckenübertragung mit einem Stechzirkel vollziehen[1].

Man kann sich aber auch Tafeln mit einem frei beweglichen Blatt vorstellen, bei denen bezifferte Punkte des einen Blattes mit ebensolchen Linien des anderen Blattes zur Koinzidenz zu bringen sind, und die vorhin erwähnte Deckung von Punkten mit Punkten ist als Sonderfall dieser Art von Einstellung zu betrachten, da einer der beiden Punkte als Schnitt zweier Linien aufgefaßt werden kann (ein Punkt einer gewöhnlichen Leiter z. B. als Schnitt von Teilstrich mit Träger). Im folgenden sollen für diese Gattung die Schlüsselgleichungen derjenigen ganz einfachen Formen abgeleitet werden, bei denen das Grundblatt nur bezifferte Geraden trägt, die alle durch einen im Unendlichen oder im Endlichen gelegenen Punkt gehen, und das bewegliche Blatt nur bezifferte Punkte, die alle auf einer Geraden liegen.

1. Das Grundblatt trägt parallele Parallelenscharen. Das Grundblatt trage drei parallele, mit den Veränderlichen z_1, z_2, z_3 bezifferte Scharen von parallelen Geraden (Abb. 1). Diese Scharen seien in einem kartesischen Bezugssystem durch die Gleichungen

$$x_1=f_1(z_1)\,,\qquad x_2=f_2(z_2)\,,\qquad x_3=f_3(z_3)$$

gegeben. Ebenso trage der bewegliche Streifen die alle auf dieselbe Gerade (X'-Achse) als Träger bezogenen Leitern

$$x_4'=g_4(z_4)\,,\qquad x_5'=g_5(z_5)\,,\qquad x_6'=g_6(z_6).$$

Bei der Einstellung komme nun der Punkt z_4 auf die Gerade z_1, der Punkt z_5 auf die Gerade z_2 und der Punkt z_6 auf die Gerade z_3 zu liegen. Zwei beliebige dieser Koinzidenzen, z. B. $z_4 \vdash\!\dashv z_1$ und $z_5 \vdash\!\dashv z_2$ sind Einstellkoinzidenzen, die dritte $z_6 \vdash\!\dashv z_3$ ist dann Lösungskoinzidenz, so daß jede beliebige der 6 Veränderlichen als Unbekannte auftreten kann.

Da die Differenzen der Abszissen x_1, x_2, x_3 bei jeder Einstellung den entsprechenden Differenzen der x_4', x_5', x_6' proportional sind, so ergibt sich als Schlüsselgleichung des Nomogramms Abb. 1 die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_4 & 1 \\ f_2 & g_5 & 1 \\ f_3 & g_6 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Hat man eine vorgelegte Gleichung, die bis zu 6 Veränderliche enthalten kann, auf diese Form gebracht, so kann man, um der graphischen Tafel eine passende Form und eine geeignete analytische Darstellung zu geben, die Glieder jeder der beiden ersten Spalten der Determinante mit einem geeigneten Faktor multiplizieren und zu den Gliedern jeder dieser Spalten einen geeigneten Summanden hinzufügen. Unter den Gleichungen von der Schlüsselform sind für diese Tafelart besonders geeignet diejenigen, bei denen die drei Funktionen f oder die drei Funktionen g je untereinander teilweise oder alle übereinstimmen. Damit soll nicht gesagt sein, daß die zu diesen Funktionen gehörigen Veränderlichen identisch sein sollen. Ist letzteres der Fall, so hat man überzählige Systeme, die im allgemeinen nicht empfehlenswert sind.

[1] Diese Zeitschr. Bd. 3 (1923), S. 49/50, S. 53 bis 59, Bd. 4 (1924), S. 77 bis 88.

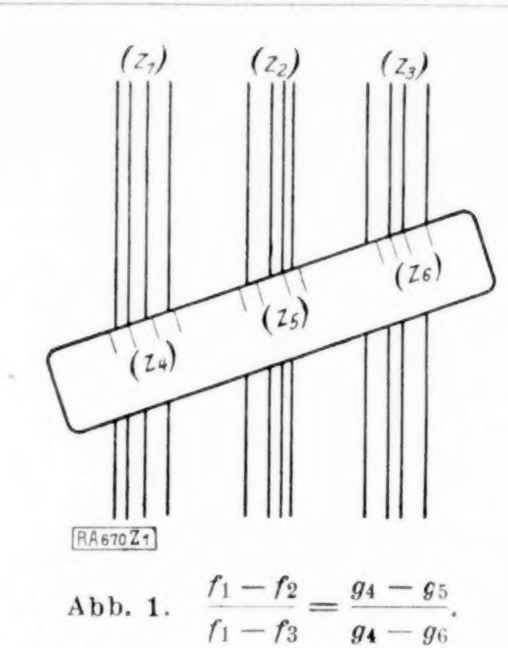


Abb. 1. $\dfrac{f_1-f_2}{f_1-f_3}=\dfrac{g_4-g_5}{g_4-g_6}.$

Beispiele: a) Mischungsformel

$$t=\frac{m_1\,t_1+m_2\,t_2}{m_1+m_2}.$$

Diese Formel mit 5 Veränderlichen, die z. B. die Mischungstemperatur t zweier gleichartiger Flüssigkeitsmengen m_1 und m_2 von den Temperaturen t_1 und t_2 angibt, oder das Mittel t zweier Messungen t_1 und t_2 von den Gewichten m_1 und m_2, oder die Schwerpunktsabszisse t zweier Massen m_1 und m_2 mit den Abszissen t_1 und t_2, läßt sich schreiben:

$$\begin{vmatrix} -m_1 & t_2 & 1 \\ m_2 & t_1 & 1 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Abb. 2 ist die zugehörige Rechentafel. Will man z. B. wissen, was herauskommt, wenn man 8 Liter 32-prozentigen mit 4 Litern 17-prozentigem Alkohol mischt, so lege man, wie es der Schlüssel vorschreibt und die Abbildung zeigt, den Ablesestreifen so auf das Grundblatt, daß $t_2=17$ auf $m_1=8$ und $t_1=32$ auf $m_2=4$ fällt. Dann zeigt die Linie 0 des Grundblatts auf dem Schiebestreifen den Wert $t=27$ an. Es gibt also 27-prozentigen Alkohol.

Um allen vorkommenden Größenbereichen gerecht zu werden, wird man auf dem Ablesestreifen mehrere gleichförmige Leitern verschiedenen Maßstabs anbringen. Man kann auch die t-Leiter fest auf das Grundblatt zeichnen und die Ablesung mit einem Papierstreifen vornehmen, auf den man jeweils die drei Teilpunkte überträgt.

b) Sphärischer Kosinussatz

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Setzt man in bekannter Weise

$$b + c = u, \qquad b - c = v,$$

so kann man die Gleichung auf folgende Form bringen:

$$\begin{vmatrix} -\cos 0^0 & -\cos v & 1 \\ -\cos 180^0 & -\cos u & 1 \\ -\cos \alpha & -\cos a & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

So kommt man zu der Rechentafel Abb. 3, die man mühelos herstellt, indem man bei dem »Sinuslinearpapier« von C. Schleicher und Schüll (Nr. $378^1/_2$ und Nr. $379^1/_2$) die Sinusbezifferung durch eine Kosinusbezifferung ersetzt. Behält man übrigens die Sinusbezifferung bei, so kann die Rechentafel zur Lösung des sphärischen Sinussatzes dienen. Der Punkt 0 der beweglichen Leiter wird dann stets auf die Grade 0 des Grundblatts eingestellt und die eine Hälfte bei Grund- und Schiebeblatt fällt weg.

Es sei z. B. die Entfernung von Hamburg ($53^1/_2{}^0$ n. B., 10^0 ö. L.) und New York ($40^1/_2{}^0$ n. B., 74^0 w. L.) gesucht. Dann kennt man in dem Dreieck Hamburg—New York—Südpol die Seiten $b = 90^0 + 53^1/_2{}^0 = 143^1/_2{}^0$, $c = 90^0 + 40^1/_2{}^0 = 130^1/_2{}^0$ und den Winkel $\alpha = 10^0 + 74^0 = 84^0$. Durch numerische Rechnung findet man $b + c = 274^0$, $b - c = 13^0$. Legt man nun — siehe den Schlüssel — die α-Leiter so auf das Grundblatt, daß ihr linker, mit 0^0 bezifferter Endpunkt auf die mit 13^0 und ihr rechter, mit 180^0 bezifferter Endpunkt auf die mit 274^0 bezifferte Parallele fällt, so zeigt der Teilstrich $\alpha = 84^0$ auf die Parallele $a = 55^0$. Also beträgt die gesuchte Bogenentfernung rd. 55^0. Das sind rd. 55×111 km $= 6100$ km.

Auch hier kann man bei fest auf das Grundblatt gezeichneter α-Leiter die Ablesung mit Hilfe eines Papierstreifens vollziehen.

Gleichungen von der hier behandelten Schlüsselform

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_4 & 1 \\ f_2 & g_5 & 1 \\ f_3 & g_6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

lassen sich auch durch eine Fluchtentafel mit den kartesischen Netzen

$$x = f_1,\ y = g_4; \quad x = f_2,\ y = g_5; \quad x = f_3,\ y = g_6$$

darstellen. Für unser Beispiel b) erhält man die von M. d'Ocagne[1]) entworfene und als »trigonometrisches Gitter« bezeichnete Tafel. Auch kann man einen Flächenschieber von der in der Abb. 4 dargestellten Form wählen. Hier legt man den beweglichen Streifen so an eine der unbezifferten wagerechten Parallelen, daß

[1]) Traité de Nomographie, 2. Aufl. Paris 1921, S. 301.

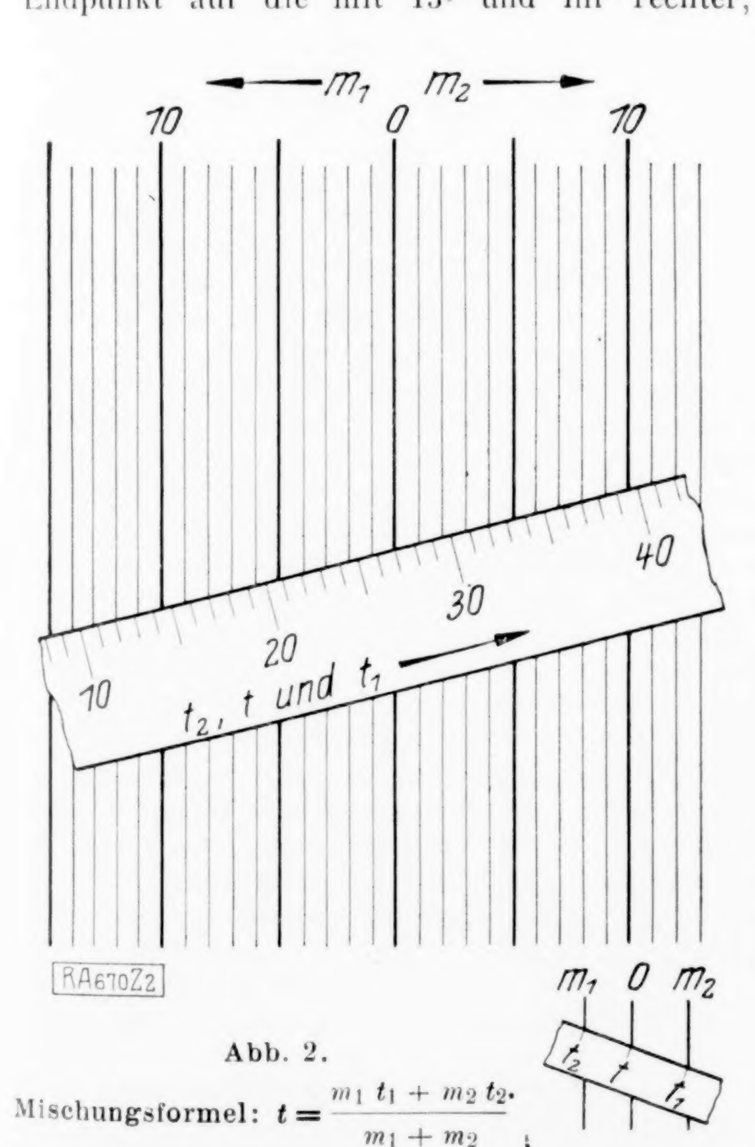


Abb. 2.

Mischungsformel: $t = \dfrac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}$.

Beispiel: $m_1 = 8$, $t_1 = 32$, $m_2 = 4$, $t_2 = 17$; $t = 27$.

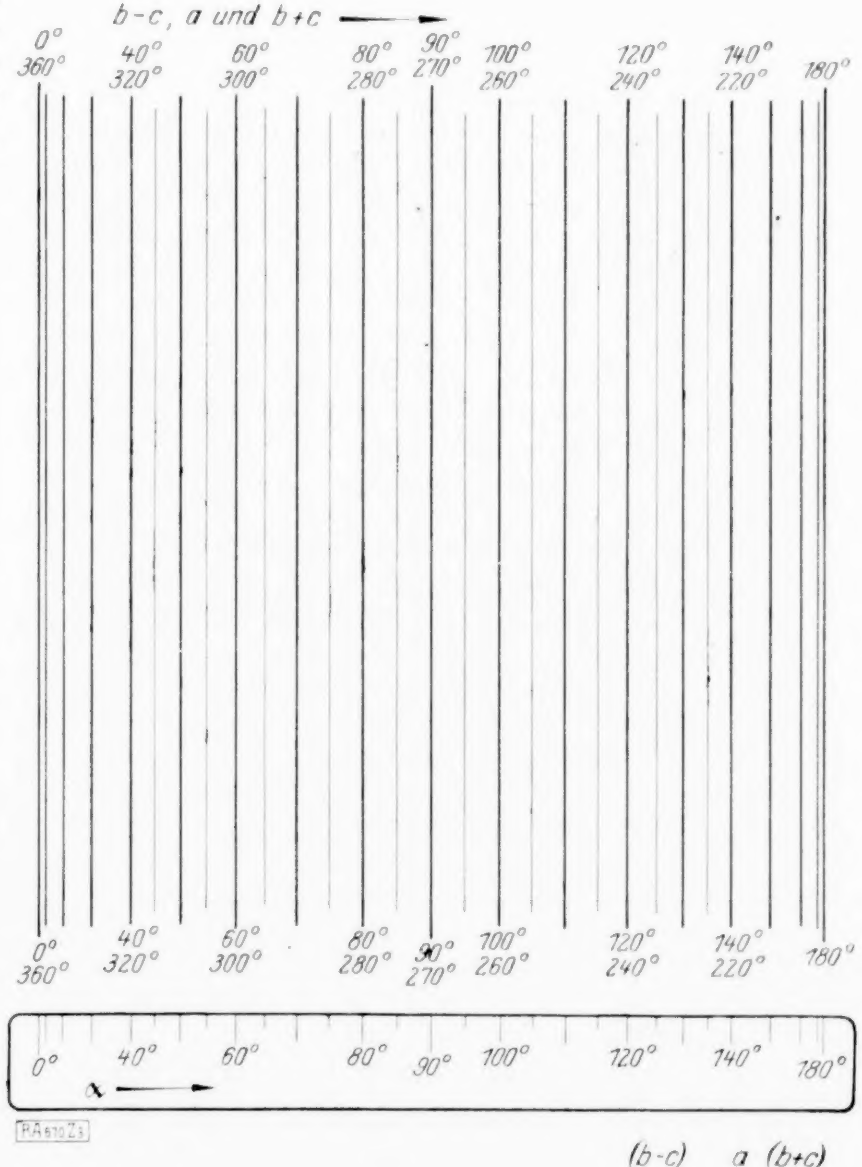


Abb. 3. Sphärischer Kosinussatz:
$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$.

die Koinzidenzen $z_4 \vdash\!\dashv z_1$, $z_5 \vdash\!\dashv z_2$, $z_6 \vdash\!\dashv z_3$ entstehen. Das Beispiel b) hat schon M. Eble[1]) nach diesem Verfahren behandelt.

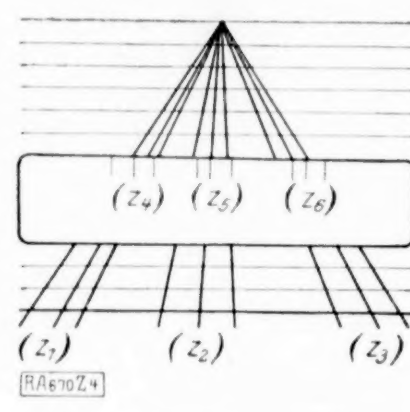


Abb. 4. $\dfrac{f_1 - f_2}{f_1 - f_3} = \dfrac{g_4 - g_5}{g_4 - g_6}$.

2. Das Grundblatt trägt Strahlenbüschel mit gemeinsamem Zentrum. Auf dem Grundblatt erzeugt man 4 bezifferte Strahlenbüschel (z_1), (z_2), (z_3), (z_4) dadurch, daß man die Teilpunkte von 4 auf demselben geraden Träger (X-Achse) befindlichen Leitern

$$x_1 = f_1, \quad x_2 = f_2, \quad x_3 = f_3, \quad x_4 = f_4$$

mit einem beliebigen, außerhalb dieses Trägers gelegenen Punkte der Ebene verbindet (Abb. 5). Der bewegliche Streifen trägt auf einem geraden Träger (X'-Achse) die 4 Leitern

$$x_5' = g_5, \quad x_6' = g_6, \quad x_7' = g_7, \quad x_8' = g_8.$$

Bei der Einstellung fällt ein Punkt z_5 auf eine Gerade z_1, ein Punkt z_6 auf eine Gerade z_2, ein Punkt z_7 auf eine Gerade z_3 und ein Punkt z_8 auf eine Gerade z_4. Ist z. B. z_8 gesucht, so ist $z_8 \vdash\!\dashv z_4$ Lösungskoinzidenz, während die drei anderen Koinzidenzen Einstellkoinzidenzen sind.

Man läßt also den Punkt z_5 auf der Geraden z_1 und den Punkt z_6 auf der Geraden z_2 gleiten, bis auch der Punkt z_7 auf die Gerade z_3 fällt. Dann geht der Strahl z_4 durch den Leiterpunkt mit der gesuchten Bezifferung z_8.

[1]) Vergl. Láska, Lehrbuch der Astronomie, 2. Aufl., 1. Teil, Bremerhaven 1906, S. 8 bis 10.

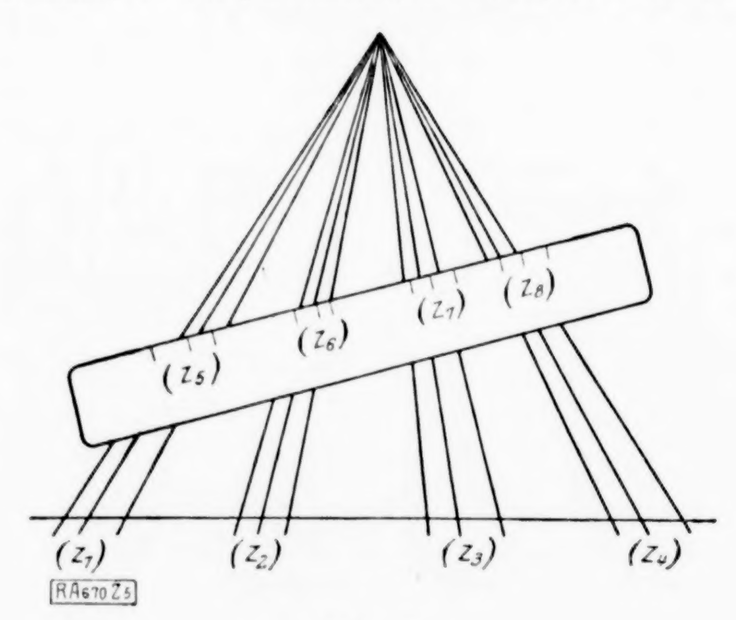


Abb. 5.

$$\frac{f_3 - f_1}{f_3 - f_2} : \frac{f_4 - f_1}{f_4 - f_2} = \frac{f_7 - f_5}{f_7 - f_6} : \frac{f_8 - f_5}{f_8 - f_6}.$$

Für eine zu einer Punktreihe x projektive Punktreihe x' besteht eine Beziehung

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$$

oder

$$x x' \gamma - x \alpha + x' \delta - \beta = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung für x und x' der Reihe nach die Paare f_1, g_5; f_2, g_6; f_3, g_7; f_4, g_8 ein, so erhält man die 4 Gleichungen

$$f_1 g_5 \gamma - f_1 \alpha + g_5 \delta - \beta = 0$$
$$f_2 g_6 \gamma - f_2 \alpha + g_6 \delta - \beta = 0$$
$$f_3 g_7 \gamma - f_3 \alpha + g_7 \delta - \beta = 0$$
$$f_4 g_8 \gamma - f_4 \alpha + g_8 \delta - \beta = 0.$$

Die Elimination von α, β, γ, δ aus diesen 4 Gleichungen ergibt nun als Schlüsselgleichung für die Tafelform Abb. 5 die Gleichung mit 8 Veränderlichen

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_5 & f_1 & g_5 & 1 \\ f_2 & g_6 & f_2 & g_6 & 1 \\ f_3 & g_7 & f_3 & g_7 & 1 \\ f_4 & g_8 & f_4 & g_8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Marburg. P. Luckey. 670

Transformationen in nomographischer Darstellung. Im Nomogramm besitzen wir außer einem wertvollen Hilfsmittel der graphischen Darstellung auch ein mathematisches Denkmittel. So bietet gerade die nomographische Darstellung von Transformationen für diese Auffassung ein lehrreiches Beispiel[1]).

1. Nomographie und Analysis situs. Die Netznomogramme haben im Gegensatze zu den Fluchtnomogrammen die vorteilhafte Eigenschaft, daß sie gegen Verzerrungen im Sinne der Analysis situs (Topologie) unempfindlich sind. Man kann bei ihnen das bekannte Anschauungsmittel der topologischen Untersuchungen anwenden, das hier darin besteht, daß man sich etwa das Netznomogramm auf einer Kautschukplatte markiert und diese in entsprechender Weise verzerrt denkt. In der Anwendung zeigt sich diese wertvolle Eigenschaft auch darin, daß, falls sich das Zeichenpapier verzieht, das Nomogramm noch richtig bleibt, was von den Fluchtnomogrammen nicht behauptet werden kann. (Letztere bleiben nur bei allen homographischen Transformationen richtig.) Diese Analysis-situs-Eigenschaft der Netznomogramme sieht man auf folgende Weise ein. Beim Netznomogramm, das eine Superposition dreier Kurvenscharen ist, kommt es darauf an, daß Scharkurven zweier dieser Scharen sich in einem Punkte schneiden und daß durch diesen Punkt eine Kurve der dritten Schar geht. Diese Verhältnisse bleiben auch bei allen eineindeutigen stetigen Verzerrungen erhalten. Wenn wir mit Brouwer eine nebst ihrer Inversen stetige und eineindeutige Abbildung als eine topologische

[1]) Vergl J. Dejmek, Ueber ein Nomogramm zur Darstellung der Längen- und Zeitverhältnisse in der speziellen Relativitätstheorie. Phys. Zeitschr. 26, 256, 1925.

bezeichnen, so wollen wir von zwei Netznomogrammen, welche durch eine derartige Vorschrift zusammenhängen, sagen, sie seien *topologische Bilder* voneinander[1]).

Die vorangegangenen Bemerkungen kennzeichneten das Netznomogramm in einer prinzipiellen Eigenschaft, die sich zeigt, wenn man das Nomogramm als solches einer eineindeutigen stetigen Verzerrung unterwirft. Neben dieser Veränderung des Nomogramms kann noch eine andere betrachtet werden, die dadurch entsteht, daß man die Parameter der einzelnen Kurvenscharen einer Transformation unterwirft. Diese Veränderung des Nomogramms liefert gleichzeitig eine nomographische Darstellung der Transformationen.

Es kann zunächst die Frage aufgeworfen werden, wann zwei Nomogramme, die durch eine Transformation der Parameter auseinander hervorgehen, topologische Bilder voneinander sind. Zu einer Beantwortung dieser Frage auf analytischem Wege zu gelangen, scheint gegenwärtig nicht möglich zu sein, da man über keine analytische Darstellung der allgemeinsten eineindeutigen stetigen Transformation verfügt. Eine solche kann ja als eine Zusammensetzung von vielen infinitesimalen Transformationen gedacht werden[2]).

Man gelangt aber auf folgendem Wege zu einer Aussage. Ist die Gleichung $F(z_1, z_2, z_3) = 0$ $(F_{123} = 0)$ gegenüber der in Frage stehenden Transformation

$$z_i = f_i(\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}) \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \quad (1)$$

invariant, d. h. geht $F_{123} = 0$ beim Uebergang zu einem andern Koordinatensystem über in $F(\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}) = 0$ $(F_{\overline{123}} = 0)$, so würden sich die Nomogramme für $F_{123} = 0$ und $F_{\overline{123}} = 0$ bei Wahl derselben Trennung der Veränderlichen (disjonction des variables bei d'*Ocagne*) decken. Für die Gleichung $F_{123} = 0$ sei eine Trennung der Veränderlichen gefunden, dargestellt durch die Gleichungen

$$z_i = \varphi_i(x, y)^{3)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Vermöge der Transformation (1) gehe $F_{123} = 0$ über in $G_{123} = 0$[4]) und man hat nun für diese Gleichung die Wahl der Trennung der Variablen frei. Wir beschränken aber die Freiheit in der Trennung der Veränderlichen, indem wir die Transformation (1) in sie mit einbeziehen. Aus

$$z_i = f_i(\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}) = \varphi_i(x, y)$$

folgt durch Auflösen der Gleichungen nach $\overline{z}$

$$\overline{z_i} = \psi_i(x, y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Die Gleichungen (3) stellen *eine* Trennung der Veränderlichen für $G_{123} = 0$ dar. Denn $F_{123} = 0$ und $G_{123} = 0$ hängen ebenso mit (1) zusammen, wie die Gleichungen (2) und (3). Die Gleichungen (3) sollen als das Resultat des *Einbeziehens einer Transformation in die Trennung der Veränderlichen* gelten. Durch sie wird aus allen möglichen Trennungen für $G_{123} = 0$ eine ausgewählt, welche die Transformation implizite enthält.

Beide den Trennungen (2) und (3) entsprechenden Nomogramme werden superponiert.

Wählt man also — jetzt bei vorausgesetzter Invarianz von $F_{123} = 0$ gegenüber (1) — als Trennung der Veränderlichen für die Gleichung $F_{\overline{123}} = 0$ die aus der Anwendung obiger Operation hervorgehenden Gleichungen, so decken sich die Nomogramme *nicht* mehr. *Beide* Nomogramme stellen also wegen der vorausgesetzten Invarianz die Gleichung $F = 0$ dar, woraus man zu schließen berechtigt ist, daß die beiden Nomogramme topologische Bilder voneinander sind. Man gelangt also zu dem Ergebnis, *daß zwei Netznomogramme, die durch Transformation der Parameter auseinander hervorgehen, dann topographische Bilder voneinander sind, falls die Gleichung, die durch das Nomogramm dargestellt wird, gegenüber der in Frage stehenden Transformation invariant ist.*

2. *Darstellung von Transformationen.* Es können zwei Wege eingeschlagen werden, um Transformationen nomographisch darzustellen. Man kann von einer direkten und indirekten Methode sprechen. Die erstere besteht darin, daß man, falls das System der Transformationsgleichungen vorliegt, für jede Gleichung das Nomogramm — sei es ein Netznomogramm oder ein Fluchtnomogramm, wenn dies möglich ist — zeichnet. Dies hat zur Folge, daß soviel Nomogramme gezeichnet werden müssen, als Veränderliche vorhanden sind. So ist von M. *Lindow* ein Fluchtnomogramm für die *Thiele*-Transformation gezeichnet worden, die für das »problème restreint« von fundamentaler Bedeutung ist[1]). Sind aber mehr als zwei unabhängige Veränderliche durch eine Transformation mit einem zweiten System von Veränderlichen verknüpft, so wird die Darstellung schon umständlicher.

Der Kernpunkt der indirekten Methode besteht demgegenüber in der Operation, die oben das Einbeziehen der Transformation in die Trennung der Veränderlichen genannt wurde. Die Trennung der Veränderlichen (3) enthält die Transformation implizite.

Handelt es sich darum, zusammengehörige Werte von z_i und $\overline{z_i}$ zu bestimmen, so ist selbstverständlich die direkte Darstellung zu

[1]) Von diesem Standpunkte aus kann der *Anamorphose* (Verstreckung bei *Luckey*) die Auffassung gegeben werden, daß die verstreckte Tafel (Nomogramm mit Geradenscharen) als topologisches Bild eines allgemeinen Netznomogramms erscheint.

[2]) Vergl. etwa G. *Fano*, Enzykl. d. mathem. Wissenschaften, III. Bd. II. Teil, p. 355.

[3]) Es wird hier nur der Fall mit drei Veränderlichen betrachtet, da bei mehr als drei Veränderlichen das Nomogramm in den meisten Fällen auf eine *Verkoppelung* von Nomogrammen mit drei Veränderlichen zurückgeführt werden kann.

[4]) Die Invarianzeigenschaft von $F_{123} = 0$ sei für den Moment nicht vorausgesetzt.

[1]) M. *Lindow*, Astronom. Nachr., Nr. 5128, Bd. 214, S. 236.

wählen. Denn nach der indirekten Methode erhält man nur zusammengehörige Werte z_i und $\overline{z_i}$, die außerdem den Gleichungen $F_{123} = 0$ bezw. $G_{123} = 0$ genügen. Es hieße also Unmögliches vom Nomogramm in unserer Darstellung zu verlangen, wollte man sämtliche zusammengehörige Werte ablesen.

Dagegen wird die Darstellung nach der indirekten Methode der Auffassung des Nomogramms als mathematisches Denkmittel gerecht, indem sie gestattet, die durch die Transformation bedingten Verhältnisse in graphischer Darstellung zu überblicken. Als Gleichung $F_{123} = 0$, die an sich irrelevant ist, wird man natürlich eine solche wählen, die der Transformation gegenüber von bestimmtem Interesse ist. Ein Beispiel bietet das Nomogramm des Verfassers zur Darstellung der Längen- und Zeitenverhältnisse in der speziellen Relativitätstheorie, das die bekannten Erscheinungen, die durch die Lorentz-Transformation bestimmt werden, zu überblicken gestattet[1]. Dortselbst sind die beiden superponierten Nomogramme topologische Bilder voneinander.

Brünn, 10. Nov. 1925. J. Dejmek. 612

Die Auflösung von Gleichungen mit logarithmischen Gliedern. 1. Aus der Gleichung

$$a\,x \lg x + b\,x + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

sei x zu berechnen. Dieser Fall kommt in der Thermodynamik vor, wenn aus der Kirchhoffschen Dampfspannungsgleichung bei gegebenem Sättigungsdruck die zugehörige Siedetemperatur zu bestimmen ist. Wir können uns dazu des folgenden zeichnerischen Verfahrens bedienen. Wir setzen

$$\lg x = y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und zeichnen uns in einem Diagramm mit x als Abszisse und y als Ordinate die logarithmische Linie (2) ein.

Führen wir (2) in die Gleichung (1) ein, so geht sie über in

$$a\,x\,y + b\,x + c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel, je nachdem ob a negativ oder positiv ist. Wir können uns diese im x, y-Diagramm konstruieren, oder einfacher dadurch bestimmen, daß wir für einige Werte von x aus (3) das zugehörige y berechnen. Der Schnittpunkt der Ellipse bezw. Hyperbel mit der logarithmischen Linie bestimmt uns durch seine Abszisse den gesuchten Wert von x.

2. Es seien die beiden Gleichungen gegeben:

$$a \lg x + b \lg y + c\left[(1-x)^2 - (1-y)^2\right] + d_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4),$$

$$a \lg (1-x) + b \lg (1-y) + c\,(x^2 - y^2) + d_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Derartige Gleichungen treten auf als Gleichgewichtsbedingungen für ein Flüssigkeits-Dampfgemisch aus zwei Bestandteilen[2]. Es besteht nun die Aufgabe, x und y als Unbekannte aus den Gleichungen (4) und (5) zu berechnen. Wir bedienen uns dazu wieder eines zeichnerischen Verfahrens. Dasselbe besteht darin, daß wir den funktionellen Zusammenhang zwischen x und y, der sich einerseits aus der Gleichung (4), andrerseits aus der Gleichung (5) ergibt, in einem Diagramm durch Kurven darstellen. Der Schnittpunkt dieser beiden Kurven bestimmt die zusammengehörigen Werte von x und y, die sowohl der Gleichung (4) als auch der Gleichung (5) genügen, und die daher die gesuchte Lösung darstellen.

Wie sich diese Kurven ermitteln lassen, sei im Nachfolgenden erläutert. Wir setzen

$$a \lg x = z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und zeichnen uns die durch (6) gegebene logarithmische Linie in einem Diagramm mit x als Abszisse und z als Ordinate auf, siehe Abb. 1. Wir nehmen nun für y irgend einen

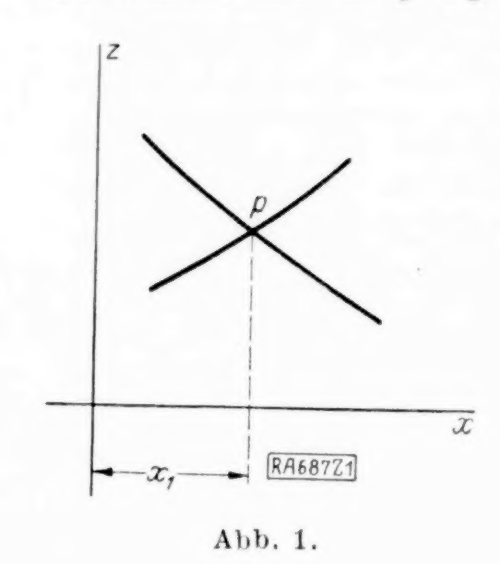


Abb. 1.

bestimmten Wert y_1 an, den wir uns als Ordinate in einem x, y-Diagramm auftragen, siehe Abb. 2. Wir schreiben ferner für den Wert y_1

$$b \lg y_1 - c\,(1 - y_1)^2 + d_1 = e \quad . \quad . \quad (7).$$

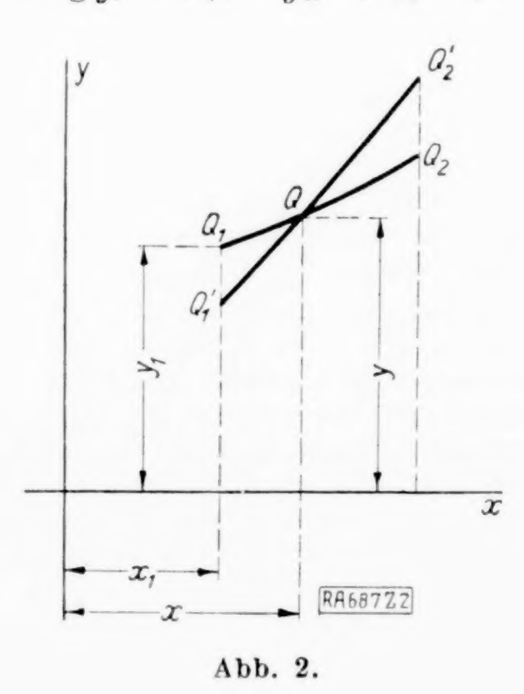


Abb. 2.

Unter Berücksichtigung von (6) und (7) erhalten wir dann aus (4) eine Gleichung von der Form

$$z + c\,(1-x)^2 + e = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

[1] loc. cit. p. 258.

[2] Siehe V. Fischer, Beiträge zur Thermodynamik veränderlicher Massen nebst Anwendungen, Zeitschr. für techn. Phys. 7, 1926, S. 527.

(8) stellt die Gleichung einer Parabel dar, die sich im x, z-Diagramm, Abb. 1, konstruieren ließe. Einfacher geschieht die Aufzeichnung dadurch, daß man für einige Werte von x aus Gleichung (8) die zugehörigen Werte von z berechnet. Der Schnittpunkt P der Parabel mit der logarithmischen Linie, siehe Abb. 1, entspricht der Gleichung (8), und somit auch der Gleichung (4) für den angenommenen Wert von y. Tragen wir uns daher die zu diesem Schnittpunkt P gehörende Abszisse x_1 aus dem Diagramm Abb. 1 in dem Diagramm Abb. 2 als Abszisse zu y_1 auf, so erhalten wir einen Punkt Q_1 der durch Gleichung (4) gegebenen Kurve. In gleicher Weise ergibt sich ein nächster Punkt Q_2 derselben, u. s. w. Ebenso finden wir die Kurve Q_1', Q_2' ..., welche die Gleichung (5) darstellt. Der Schnittpunkt Q der beiden Kurven bestimmt durch seine Abszisse und Ordinate die beiden gesuchten Werte x und y, welche die beiden Gleichungen (4) und (5) erfüllen.

Sind die Werte a, b, c, d_1, d_2 in den Gleichungen (4) und (5) keine Konstanten, sondern veränderliche Parameter, die z. B. bei der Anwendung der Gleichungen auf Gemische den Sättigungsdruck und die Siedetemperatur enthalten, so kann man bei bestimmten Drücken die obige Konstruktion für verschiedene Temperaturen wiederholen und bekommt so die Gleichgewichtsisobaren des Gemisches.

Frankfurt a. M. V. Fischer. 687

Zur Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion und des Wahrscheinlichkeitsintegrals. Die Berechnung des Laplaceschen Integrales

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \cos b x \, dx \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

und des aus diesem durch Integration abgeleiteten Integrals

$$\int_0^b I \, d b = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \frac{\sin b x}{x} \, dx \quad . \quad . \quad (B)$$

erfolgt vornehmlich nach zwei Methoden, die schon Laplace[1]) selbst gegeben hat. Bei der einen Methode wird die Umformung dadurch erreicht, daß zunächst $\cos b x$ durch die Moivresche Formel $\frac{1}{2}(e^{bxi} + e^{-bxi})$ ersetzt und darauf umgeformt wird. Nach der anderen Methode wird durch Differentiation und partielle Integration die Differentialgleichung

$$\frac{d I}{d b} + \frac{b}{2 a} I = 0$$

hergeleitet, deren Lösung der gesuchte, sich auch nach der ersten Methode ergebende Ausdruck

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \, e^{-\frac{b^2}{4 a}}$$

ist. Eine weitere Lösung, die bereits Fourier[1]) erwähnt, ergibt sich durch Entwicklung von $\cos b x$ in eine Reihe mit darauf folgender Integration der aufeinander folgenden Glieder. Hingegen führt die Entwicklung der Funktion $e^{-a x^2}$ in eine Reihe zu einem falschen Ergebnis, weil das Integral

$$\int_0^{\infty} x^{2k} \cos b x \, dx = 0 \;{}^{2)}$$

besteht. Das Integral (A) läßt sich aber auch durch Umformung der Exponentialfunktion $e^{-a x^2}$ berechnen, wenn man nämlich nach dem Moivreschen Satz

$$e^{-a x^2} = e^{(a i x^2)\, i} = \cos (a i x^2) + i \sin (a i x^2)$$

setzt, wodurch sich ergibt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \cos b x \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos (a i x^2) \cos b x \, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin (a i x^2) \cos b x \, dx .$$

Aus den Integralen

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \cos x^2 \cos 2 \xi x \, dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos \xi^2 + \sin \xi^2) \\ &= \sqrt{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \xi^2\right) \end{aligned}\right\} \text{(a)},$$

$$\left.\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2 \cos 2 \xi x \, dx &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\cos \xi^2 - \sin \xi^2) \\ &= \sqrt{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \xi^2\right) \end{aligned}\right\} \text{(b)},$$

die man z. B. bei Cournot[3]), Duhamel[4]) und bei Boussinesq[5]) findet, oder aus den Integralen

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos (m x^2) \cos n x \, dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2 m}} \left[\cos \left(\frac{n^2}{4 m}\right) \right. \\ &\left. + \sin \left(\frac{n^2}{4 m}\right)\right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \cos \frac{1}{4} \left(\pi - \frac{n^2}{m}\right) \end{aligned}\right\} \text{(a')}$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin (m x^2) \cos n x \, dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2 m}} \left[\cos \left(\frac{n^2}{4 m}\right) \right. \\ &\left. - \sin \left(\frac{n^2}{4 m}\right)\right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{m}} \sin \frac{1}{4} \left(\pi - \frac{n^2}{m}\right) \end{aligned}\right\} \text{(b')},$$

[1]) Théorie analytique des probabilités, Seconde Édition, Paris 1814, pag. 96 und 97.

[1]) Analytische Theorie der Wärme, Deutsche Ausgabe von Prof. Dr. B. Weinstein, Berlin 1884, S. 349, Nr. 374. — Diese Darstellung findet man z. B. auch bei J. L. Raabe, Differential- und Integralrechnung, Zürich 1839, Bd. I, S 258.

[2]) Vergl. hierzu Raabe, Bd. I, S. 245 und 341, sowie Franke, Lehrbuch der höheren Mathematik, Hannover 1851, S. 270.

[3]) Elementarbuch der Theorie der Funktionen, Deutsch bearbeitet von Dr. C. H. Schnuse, Darmstadt 1845, S. 422.

[4]) Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, deutsch von Wagner, Braunschweig 1855, S. 242 und 243.

[5]) Cours d'analyse infinitésimale, Tome II, Fascicule II, Compléments, Paris 1890, pag. 134.

die sich beispielsweise bei Raabe[1]) und bei Schlömilch[2]) vorfinden, kann man die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(a i x^2) \cos b x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a i}} \sin \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(a i x^2) \cos b x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a i}} \cos \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right)$$

herleiten, durch deren Anwendung die oben aufgestellte Gleichung übergeht in

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \cos b x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a i}}\left[\sin \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right) + i \cos \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\pi i}{a}}\left[\cos \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right) - i \sin \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\pi i}{a}}\, e^{-\frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right) i}.$$

Da aber $e^{1/4 \pi i} = \sqrt{i}$ ist, so ergibt sich, wie es sein muß,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \cos b x \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad \text{(I)}.$$

In dem schon erwähnten Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis von Prof. Dr. Schlömilch wird mit Anwendung der Integrale (a') und (b') das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{i \alpha^2 \zeta^2} \cos 2 \beta \zeta \, d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}\, e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right]}$$

hergeleitet. Setzt man in diesem

$$\alpha = \sqrt{a i}, \quad \beta = \frac{b}{2}, \quad e^{1/4 \pi i} = \sqrt{i},$$

so erhält man in Uebereinstimmung mit der gegebenen Darstellung

$$\int_0^{\infty} e^{-a \zeta^2} \cos b \zeta \, d\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Auf andere Weise haben Prof. Dr. J. Dienger[3]) und auch Prof. Dr. Schlömilch[4]) das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(r x^2 + 2 a x) i} = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\, e^{\frac{\pi}{4} i - \frac{a^2}{r} i}$$

hergeleitet, das durch die Substitutionen

$$r = a i, \quad 2a = b, \quad e^{\frac{\pi}{4} i} = \sqrt{i}$$

in das mit dem Integral (I) identische Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2 + b x i} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

umgeformt werden kann. Dieses Integral geht aber auch aus dem in den Vorlesungen über die Integralrechnung von Cauchy-Moigno[1]) und bei Natani[2]) sich findenden Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{b(y^2 + 2\beta y) i} \, dy = \sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{-b \beta^2 i}\, \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

hervor, wenn man

$$b = a i, \quad \beta = -\frac{c}{2b}$$

setzt und beachtet, daß man für $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ auch $\sqrt{i}$ schreiben kann.

Integriert man die Gleichung (I) nach b von 0 bis b, so folgt bekanntlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \frac{\sin b x}{x} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int_0^b e^{-\frac{b^2}{4a}} \, db.$$

Will man jedoch ohne Benützung des Wertes von I das Integral $\int_0^b I \, db$ ermitteln, so bilde man die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(a i x^2) \frac{\sin b x}{x} \, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(a i x^2) \frac{\sin b x}{x} \, dx$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a i}} \int_0^b \left[\sin \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right) + i \cos \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right)\right] db$$

$$= -2\sqrt{\pi a i} \int_0^b \frac{1}{b}\, d\left[\cos \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right) - i \sin \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right)\right],$$

der zufolge wiederum

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a x^2} \frac{\sin b x}{x} \, dx \\ &= -2\sqrt{\pi a i} \int_0^b \frac{1}{b}\, d e^{-\frac{1}{4}\left(\pi + \frac{b^2}{a i}\right) i} \\ &= 2\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{b}{2\sqrt{a}}} e^{-t^2} \, dt \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

ist.

Berlin. H. Koeppler. 701

[1]) Erster Teil, S. 268.

[2]) Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, Zweiter Teil. Dritte Auflage 1882, S. 168.

[3]) Differential- und Integralrechnung. Stuttgart 1862, 2. Bd., S. 300.

[4]) Kompendium der höheren Analysis, 4. Aufl. Braunschweig 1895. 2. Bd., S. 275.

Diese Darstellung, bei der dann umgekehrt die Integrale (a') und (b') hergeleitet werden, findet man ferner auch in den »Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen« von J. Thomae, Leipzig und Berlin 1908, S. 171.

[1]) Deutsche Ausgabe von Dr. C. H. Schnuse, Braunschweig 1846, S. 233.

[2]) Die höhere Analysis in vier Abhandlungen, Berlin 1866, S. 165.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin SW 19, Beuthstr. 7, zu beziehen.)

J. **GECKELER,** Ueber die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen. Mit 21 Abb. und 5 Zahlentafeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. Heft 276. VDI-Verlag G. m. b. H. 1926. 52 S. Preis brosch. 6,50 M.

Die unmittelbare Veranlassung zu der vorliegenden Arbeit war der Bau einer weitgespannten dünnwandigen Eisenbetonkuppel. Infolge der Verwendung im Bauwesen entstand der Wunsch, die exakten, aber kompliziert zu berechnenden Lösungen durch Näherungsmethoden zu ersetzen, die einfacher zu handhaben, aber für eine Festigkeitsrechnung doch ausreichend genau sind. Der Verfasser geht bei seinen Entwicklungen von den Love'schen Gleichungen aus. Es zeigt sich (im Sinn des Saint-Venant'schen Prinzips), daß die Spannungen, die von Randkräften und Randmomenten herrühren, vom Rande weg mit starker Dämpfung oszillierend abklingen. Man kann daher entsprechend einem Vorschlag von W. Bauersfeld die Schalengleichung durch Vernachlässigung von Gliedern in solche mit konstanten Koeffizienten überführen und Lösungen gewinnen, die Drehschalen von beliebiger Form und variabler Wandstärke umfassen und bequemer anwendbar sind. Die Rechnung ist für eine konstante und für eine nach einem angenommenen Gesetz veränderliche »Abklingungszahl« durchgeführt. An dem Beispiel einer Eisenbetonkuppel ist die gute Uebereinstimmung zwischen einer exakten Berechnung und der Näherungsmethode gezeigt; auch unmittelbare Messungen bestätigen die gefundenen Ergebnisse. Angewendet ist das Verfahren noch auf die Ermittlung der Spannungen in Kesselböden.

J. Ratzersdorfer. 762

Dr. techn. h. c. A. **OSTENFELD,** Professor an der Technischen Hochschule Kopenhagen. Die Deformationsmethode. Mit 42 Abb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. V + 118 S. Preis 10 M.

Bei der Berechnung von statisch unbestimmten Systemen wurden schon vielfach, in Anlehnung an ein Verfahren von Mohr, die Formänderungsgrößen als Unbekannte eingeführt. In der vorliegenden Arbeit ist aber die der gebräuchlichen »Kraftmethode« dual zugeordnete Deformationsmethode in eine systematischere Form gebracht. Sind ζ die als Unbekannte eingeführten Formänderungen, so ist eine beliebige Wirkungsgröße (Stabkraft, Moment usw.), da Formänderung und Spannung in linearer Beziehung zur Belastung stehen:

$$S = S_0 + S_a \zeta_a + S_b \zeta_b + \ldots .$$

Hierbei bedeuten, wenn die S Stabkräfte sind, das ζ_a die gegenseitige Verschiebung zweier Punkte a, oder die Verlängerung eines hinzugedachten Stabes $a—a$, so die Stabkraft bei Lastangriff, wenn die fiktiven Stäbe die Längenänderung Null haben, S_a die Stabkraft infolge einer Verlängerung Eins des Stabes $a—a$ usw. Sind die S Momente, so ist ζ_a die Winkeländerung eines vom Punkte a ausgehend gedachten steifen Armes. Die ζ berechnet man aus der Bedingung, daß die Werte S für die hinzugefügten Stäbe (oder Arme) gleich Null sind. Das Nullsetzen der »Ueberzähligen« ergibt hier ein »Hauptsystem«, das im allgemeinen von einem höheren Grad statischer Unbestimmtheit ist, als das zu untersuchende System. In manchen Fällen ist das Verfahren aber doch zweckmäßig. Man kann eine Vereinfachung erzielen, wenn man nicht alle Gleichungen auf einmal anschreibt, sondern stufenweise vorgeht und das System allmählich durch Stäbe erweitert. Die Berechnung von räumlichen Rahmentragwerken (S. 99 bis 118) läßt sich auf diese Weise, wie das Beispiel eines Pfahlrostes zeigt, auch praktisch erledigen.

J. Ratzersdorfer. 763

Dr.-Ing. FERDINAND **SCHLEICHER,** Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Theorie zentralsymmetrisch belasteter Kreisplatten und Kreisringplatten auf elastisch nachgiebiger Unterlage. Mit Anwendungen der Theorie auf die Berechnung von Kreisplattenfundamenten und die Einspannung in elastische Medien. Mit 52 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. X + 147 S. Preis 13,50 M, geb. 15 M.

Die in der Literatur übliche lineare Beziehung zwischen Bodenpressung und Einsenkung wurde von K. Wieghardt einer Kritik unterworfen (Ueber den Balken auf elastischer Unterlage. Diese Zeitschrift 1922, S. 165—184). Die Einsenkung an einer Stelle hängt nicht nur von der Pressung an dieser Stelle, sondern von der Gesamtheit aller Pressungen ab. Hier wurden die Rechnungen, da sie nur auf diese Weise wirklich durchführbar sind, wieder mit dem linearen Ansatz vorgenommen. Die Theorie der dünnen, zentralsymmetrisch belasteten Platten, die allein untersucht werden, ist soweit gegeben, als sie für die weiteren Entwicklungen notwendig ist. Eine große Anzahl von Belastungsfällen ist dann bei verschiedenen Randbedingungen bis zu einer zahlenmäßigen Behandlung durchgerechnet. Der Anhang (S. 105 bis 148) bringt eine Zusammenstellung der Ergebnisse für freitragende dünne Kreisplatten und die erforderlichen Tabellen von Zylinderfunktionen, die wesentlich vollständiger sind als im Tabellenwerk von Jahnke und Emde. Grundplatten, zylindrische Behälter, Schornsteinfundamente aus Eisenbeton u. dergl., die man nach diesen Verfahren rechnen soll, betrachtet man sonst

gewöhnlich als »sehr steif«, d. h. man nimmt einen entsprechend linear verteilten »Auftrieb« an. Ist die Platte jedoch nicht sehr steif, so kann die — keineswegs mühelose — Berechnung nach den vorliegenden Methoden durch einen wirtschaftlichen Vorteil belohnt werden. Der praktische Ingenieur nimmt in einem solchen Fall in der Regel mehr oder weniger unsichere Voraussetzungen mit in Kauf.

J. Ratzersdorfer. 764

Dr. phil. W. DAHLMANN, Dipl.-Ing., Dozent an den Technischen Staatslehranstalten und am Technischen Vorlesungswesen Hamburg. Festigkeit der Schiffe. Mit 129 Abb. im Text und 28 Tabellen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. IV + 196 S. Preis 18 M, geb. 19,50 M.

Das richtige Erfassen des Kräftespiels in einer Konstruktion bringt immer auch eine Materialersparnis mit sich. Während im Bauwesen die Berechnungen mit hoch entwickelten Methoden der Statik vorgenommen werden, hält man im Schiffbau heute noch vielfach an den empirischen Formeln und Faustregeln fest, die von den Klassifikationsgesellschaften als Bauvorschriften ausgegeben werden. Der Grund liegt zum Teil darin, daß viele Festigkeitsaufgaben, infolge der hier auftretenden dynamischen Probleme sich schwer oder gar nicht exakt berechnen lassen. Das vorliegende Buch hat als Absicht ein Leitfaden für den Schiffbauingenieur zu sein und der Rechnung im Schiffbau mehr Geltung zu verschaffen. Es ist eine Festigkeitslehre, auf elementarer Basis, bei der eine Reihe von Anwendungen auf schiffbautechnische Fragen gegeben ist. In zwei Abschnitten (S. 1 bis 60) sind die Grundlagen besprochen: Biegung des geraden und gebogenen Stabes, Knickfestigkeit, Festigkeit von Platten, genietete Träger. Der dritte und vierte Abschnitt behandeln die Längs- und Querfestigkeit der Schiffe. Im letzten Abschnitt, der ein Drittel des Buches bildet, werden die Einzelkonstruktionen untersucht: Schotte, Maschinenfundamente, Wellentunnels, Masten, Deckbalken und Unterzüge. Die Absicht des Verfassers scheint in günstiger Weise gelöst zu sein.

Breslau. J. Ratzersdorfer. 736

Dr.-Ing. WALTER SCHILLING, Statik der Bodenkonstruktion der Schiffe. Mit 64 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. VI + 185 S. Preis 15 M, geb. 16,50 M.

Kennzeichnend für die Bodenkonstruktion der Schiffe ist das aus Längs- und Querträgern gebildete Trägernetz. Die Längsträger sind durchlaufende Balken, die auf den Querträgern elastisch gestützt und an den Enden (den Querschotten) fest aufgelagert sind. Zur Vereinfachung wird angenommen, daß der Abstand der Querträger unendlich klein ist, d. h. daß die elastischen Auflager durch eine gleichmäßige elastische Stützung ersetzt werden und daß alle Querträger gleich ausgebildet sind. Die Querträger sind die untern Riegel von Rahmen, aus denen der Schiffskörper in der Querrichtung besteht. Aus der Bedingung, daß im Kreuzungspunkt der Längs- und Querstäbe von beiden Stäben aus berechnet gleiche Durchbiegung vorhanden ist, ergibt sich die Lösung als eine bekannte inhomogene Differentialgleichung 4. Ordnung. Die vier Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen (der Längsträger) bestimmt und zwar hier für die Grenzwerte der Freiauflagerung und der vollkommenen Einspannung. Der Verfasser untersucht dann die wichtigsten Arten der Bodenkonstruktion: die Fälle eines Mittelträgers allein, sowie mit 2, 4 und 6 symmetrisch zur Mitte gelegenen Seitenträgern für die Belastungen, Wasserdruck, Einzellasten und Stützdruck im Dock. Die Rechnung ist bis zur Erreichung von Formeln durchgeführt, mit denen die Bodenuntersuchung bequem erledigt werden kann. Drei vollständige Zahlenbeispiele erläutern die Durchführung der Berechnung.

Breslau. J. Ratzersdorfer. 737

JOHANNES **SCHWENGLER,** Oberingenieur. Der Bau der Starrluftschiffe. Ein Leitfaden für Konstrukteure und Statiker. Mit 33 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. 99 S. Preis 4,80 M.

Der Verfasser, ein Mitarbeiter der ehemaligen Abteilung Dornier beim Luftschiffbau Zeppelin will mit diesem Buch einen Leitfaden für Berechnung und Konstruktion von Luftschiffen geben. Im konstruktiven Teil werden statistische Daten über Zeppeline und Luftschiffe Schütte-Lanz angeführt, hiernach der allgemeine Aufbau eines Luftschiffes beschrieben. Das Traggeripe ist ein sogenanntes räumliches Flechtwerk. Es besteht aus Längsträgern, die in der Mantelfläche verspannt sind und aus hierzu senkrechten Ringen, mit denen eine Querverspannung verbunden ist. Konstruktionsdetails sind nicht vorhanden. Der dann folgende statische Teil ist aber auch für einen Leitfaden erstaunlich dürftig und primitiv gehalten. Später (auf S. 83) findet man hierfür eine Erklärung. Nach Ansicht des Verfassers gehören nämlich »statische Berechnungsmethoden selbstverständlich zum Geschäfts- bzw. Fabrikationsgeheimnis der Firma«. (Das erinnert etwas an die Tabellen der Werte $\alpha : \sin\alpha$ und $\alpha : \operatorname{tg}\alpha$, die während des Krieges von der Inspektion der Fliegertruppen ausgerechnet und für geheim erklärt wurden). Am Schluß des Buches findet man noch einige Bemerkungen über Hallenbauten.

Breslau. J. Ratzersdorfer. 738

Dr. RICHARD VON MISES, Professor an der Universität Berlin. Fluglehre, Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in elementarer Darstellung. Dritte, stark erweiterte Auflage. Mit 192 Textabbildungen. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926. VI + 321 S. Preis 12,60 M, geb. 13,50 M.

(Aus der Einleitung.) »Die vorliegende dritte Auflage ist der zweiten gegenüber stark vermehrt. Neu aufgenommen wurde vor allem ein Kapitel über den motorlosen Flug, der in letzter Zeit so viel Interesse gefunden hat, und ein Abschnitt über die Berechnung der Gipfelhöhe und der Steigzeit. Etwas näher als früher ist auf die verschiedenen Ausführungsformen und Bauarten der Flugzeuge und Motoren eingegangen worden und schließlich sind eine Reihe von Bemerkungen über den Luftverkehr und die wirtschaftliche Verwendung der Flugzeuge hinzugefügt. In diesen beiden Punkten noch weiter zu gehen, schien mir nicht gut möglich, ohne den ganzen Charakter des Buches zu verändern.« Mises. 784

Prof. Dr. A. A. **TSCHUPROW**, Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1925. VI + 153 S. Preis geh. 6,40 M, geb. 8 M.

Dies Buch ist nicht zur Einführung in die Korrelationstheorie oder als Lehrbuch gedacht. Sein Zweck ist vielmehr, die logischen Grundlagen der zahlreichen Korrelationsmethoden zusammenfassend darzustellen und dies bestimmt seine eigentümliche Gestalt. Die Technik der Korrelationstheorie wird zwar vorausgesetzt, aber die logische Analyse zwingt zu ihrer Darstellung, wenn auch nicht in systematischer Reihenfolge. Ein großer Teil der Formeln ist daher in einem Anhang untergebracht. Diese Einteilung ist unpraktisch, besonders da die Literatur erst in einem weiteren Anhang behandelt wird. Die wesentlich logische Fragestellung bringt auch Beschränkungen des Inhalts mit sich: Die Korrelation zwischen mehr als zwei Variablen, die scheinbaren Korrelationen und die Korrelationsoberflächen sind nicht behandelt. Auch sind nur wenige praktische Beispiele gebracht, dafür interessante Reduktionen auf das Urnenschema.

Das erste Kapitel zeigt, wie die nicht mathematischen Methoden in einem stetigen Uebergang zur Korrelationstheorie und damit zur Ausschaltung der zufälligen Schwankungen, zur Abschätzung der Zuverlässigkeit und zur präzisen Fassung des Urteils führen. Im 2. und 3. Kapitel werden die Beziehungen zwischen dem kausalen, dem funktionellen und dem stochastischen Zusammenhang geklärt. Man spricht von der stochastischen Verbundenheit einer statistischen Variablen X mit einer anderen Y, wenn nach Festlegung von Y das X eine zufällige Variable bleibt. Der funktionelle Zusammenhang ist umkehrbar, dagegen sind die beiden Regressionsgleichungen auseinander nicht ableitbar. Im funktionellen Zusammenhang stehende, nicht zufällige Variable können durch mit Beobachtungsfehlern versehene Messungen zu stochastisch verbundenen Variablen werden. Wenn die mathematischen Erwartungen der einen Variablen für feste Werte der andern gleich den wahren Werten dieser Variablen sind, dann gibt die Regressionsgleichung einen funktionellen Zusammenhang. Es kann auch ein funktioneller Zusammenhang existieren, der aber durch die beiden Regressionsgleichungen nicht erfaßt wird; oder endlich es existiert kein funktioneller Zusammenhang. Dann sind die beiden Regressionsgleichungen der definitive Ausdruck der Verbundenheit. Bald ist also die stochastische Verbundenheit ein Schleier, hinter dem der gesuchte funktionelle Zusammenhang versteckt ist, bald ist gerade die Erkenntnis der stochastischen Verbundenheit unser Ziel.

Es folgen die Definitionen der Unabhängigkeit, die in der Literatur meistens nicht genügend klar auseinander gehalten sind. Die strengste lautet: Y ist stochastisch unabhängig von X, wenn die Verteilungen von Y für alle Werte von X einander gleich sind. Enger ist der Begriff des Nichtkorreliertseins: Y ist korreliert mit X, falls die mathematischen Erwartungen von Y für verschiedene Werte von X verschieden sind. Aus der stochastischen Unabhängigkeit folgt Fehlen der Korrelation, aber nicht umgekehrt. Die stochastische Unabhängigkeit ist eine symmetrische, das Nichtkorreliertsein eine unsymmetrische Beziehung zwischen den beiden Variablen. Hierfür wird ein interessantes Urnenbeispiel gegeben. Wenn X mit Y nicht korreliert ist, so ist der Korrelationskoeffizient null, aber nicht umgekehrt.

Der Verfasser ist strenger Dualist. Auf der einen Seite stehen die empirischen, auf der andern, meistens unerkennbar, die apriorischen Größen. In den beiden zentralen Kapiteln werden daher die das apriorische Abhängigkeitsgesetz und die das empirische Material kennzeichnenden Maßzahlen getrennt voneinander dargestellt. Dies hat den Vorzug logischer Klarheit, bringt aber Wiederholungen in den Formeln mit sich. Eine komplizierte Bezeichnungsweise mit vielfachen Indices und Strichen läßt leider manche an sich einfache Formel unschön aussehen.

In der Literatur wird häufig die Regression ohne weiteres als linear angenommen. Demgegenüber wird hier der Einfluß einer nicht linearen Regression scharf herausgearbeitet. Von den für das apriorische System gültigen Sätzen seien hervorgehoben: Falls die Regression linear ist, ist der Korrelationskoeffizient gleich der Korrelationsrate. Bei nicht geradliniger Regression ist der Koeffizient kleiner. Bei nicht linearer Regression folgt aus dem Verschwinden des Korrelationskoeffizienten noch nicht, daß die Variablen unkorreliert sind; wenn der Korrelationskoeffizient kleiner als Eins, kann ein funktioneller, nicht linearer Zusammenhang vorhanden sein.

Auch wenn die empirische oder apriorische Korrelationsrate verschwindet, kann eine Korrelation vorliegen. Der empirische Korrelationskoeffizient kann das empirische Korrelationsverhältnis nicht übersteigen. Der empirische Korrelationskoeffizient kann auch unbestimmt werden, falls nämlich alle empirischen

Werte einer der Variablen zufällig einander gleich sind.

Da wir über das apriorische Abhängigkeitsgesetz nur in Ausnahmefällen verfügen, ist die Hauptaufgabe der Statistik, apriorische Größen auf Grund empirischer Werte abzuschätzen. Hierzu bildet man eine Funktion der empirischen Werte derart, daß ihre mathematische Erwartung gleich dem apriorischen Wert ist oder diesem Wert mit wachsender Zahl der Versuche asymptotisch zustrebt. Die so bestimmten Größen werden als Präsumptivwerte bezeichnet. Sie sind auch zufällige Variable, werden also im Gegensatz zum Näherungswert durch Berechnung einer größeren Anzahl von Dezimalen nicht verbessert.

Bei der schwierigen Berechnung der mathematischen Erwartung von Quotienten werden verschiedene Wege eingeschlagen. So werden die mittleren Fehler der mean square contingency, des Korrelationskoeffizienten, der beiden Konstanten der Regressionsgleichung, des Korrelationsverhältnisses und der Abweichung seines Quadrates vom Quadrat des Korrelationskoeffizienten berechnet. Die apriorische mean square contingency wird durch ihren empirischen Wert überschätzt, der Korrelationskoeffizient bei normaler Korrelation durch den empirischen Wert unterschätzt, bei nicht normaler Korrelation kann auch Ueberschätzung eintreten. Der systematische Schätzungsfehler ist dann störend, wenn er von der Größenordnung des mittleren Fehlers ist. Glücklicherweise nehmen die systematischen Schätzungsfehler mit zunehmender Versuchszahl rasch ab. Die übliche Praxis, sie zu vernachlässigen, ist also im allgemeinen zulässig. Bei der mean square contingency und bei kleinen Werten der Korrelationsrate und des Korrelationskoeffizienten ist jedoch Vorsicht geboten, weil hier der systematische Schätzungsfehler von derselben Größenordnung ist, wie der mittlere Fehler.

Bisher war vorausgesetzt, daß das Abhängigkeitsgesetz während der Versuche konstant bleibt, und daß die einzelnen Versuche miteinander nicht verbunden sind. Um nachzuweisen, daß beides zutrifft, wird im Anschluß an Lexis der Divergenzkoeffizient gebildet, dessen Erwartungswert in diesem Falle gleich Eins ist. Wenn bei der Verbundenheit das Schema der nicht zurückgelegten Kugeln zutrifft, wird der systematische Schätzungsfehler und die Streuung des empirischen Korrelationskoeffizienten verkleinert, beim Schema der doppelt zurückgelegten Kugeln vergrößert.

So werden die, allen statistisch arbeitenden Disziplinen gemeinsamen, logischen Vorfragen der Korrelationstheorie untersucht. Bei der Vielfältigkeit der hier üblichen Methoden war eine solche Klärung der logischen Voraussetzungen, der Bedeutung der Begriffe und der Interpretation der Resultate dringend notwendig. Darüber hinaus bietet das Buch eine Reihe schöner und neuer Ergebnisse.

Heidelberg. E. J. Gumbel. 766

FELIX **AUERBACH,** Das Zeisswerk und die Carl-Zeiß-Stiftung in Jena. Ihre wissenschaftliche, technische und soziale Entwicklung und Bedeutung. Fünfte umgearbeitete Auflage. Mit 252 Abb. im Text und einem Bildnis von Abbe. Verlag von Gustav Fischer, Jena 1925. 258 S. Preis 6 M; geb. 8 M.

Eine Monographie über das Zeißwerk, die in gleich fesselnder Weise die Persönlichkeiten der Begründer wie die wissenschaftliche, technische und organisatorische Entwicklung des Werkes schildert und würdigt. Das Büchlein, reich mit vortrefflichen Illustrationen ausgestattet, verdient das Interesse weitester Kreise, nicht nur, weil es einen Einblick in die Leistungsfähigkeit eines der wichtigsten deutschen Industriezweige bietet. Anregung und Beispiel gibt vor allem die Darstellung der Versuche, verwaltungstechnische und soziale Probleme, wie sie im Rahmen dieser einzigartigen Schöpfung auftauchen, zu lösen.

Berlin. G. Laski. 735

Dr.-Ing. RUDOLF **KRAHMANN,** Berlin. Die Anwendbarkeit der geophysikalischen Lagerstättenuntersuchungsverfahren, insbesondere der elektrischen und magnetischen Methoden. Abhandlungen zur praktischen Geologie und Bergwirtschaftslehre, Band 3. Verlag von Wilhelm Knapp, Halle 1926. 40 S. Preis brosch. 2,50 M.

Der Hauptteil der Broschüre befaßt sich mit der Besprechung der Methode der elektrischen Aequipotentiallinien. Bei dieser Methode wird im Erdboden ein elektrisches Stromlinienfeld künstlich erzeugt und aus den Abweichungen vom normalen Stromlinienverlauf auf abnormale Werte der elektrischen Leitfähigkeit an den betreffenden Stellen geschlossen. Daß sich auf diese Art Erdöl nachweisen läßt, kann ich nicht glauben. Wenn z. B. die Stromlinien an einer bestimmten Stelle ausweichen und in der Umgebung sich zusammendrängen, so bedeutet das, daß die (mittlere) Leitfähigkeit an jener Stelle unternormal oder in der Umgebung übernormal ist. Das könnte durch das Vorhandensein von Erdöl bedingt sein. Es könnte aber auch der Grundwasserspiegel an jener Stelle eine Mulde bilden. Oder es könnte der Salzgehalt des Wassers in der Umgebung größer sein. Oder es könnten Erze in der Umgebung vorhanden sein. U. s. w. Ich glaube daher nicht, daß man sich auf diese Art in der außerordentlichen geologischen Mannigfaltigkeit des Erdinnern zurechtfinden kann.

Wien. Heinrich Löwy. 760

Prof. Dr. techn. LUDWIG **ECKHART,** Privatdozent an der Technischen Hochschule in Wien. Konstruktive Abbildungsverfahren. Eine Einführung in die neueren Methoden der darstellenden Geometrie. Mit 49 Abb. im Text. Verlag von Julius Springer, Wien 1926. 119 S. Preis 5,40 M.

Das Büchlein bringt vielleicht nicht ganz das, was man nach dem Titel erwarten könnte; das mag daran liegen, daß das eigentliche Kon-

struktionsproblem gegenüber der analytischen Diskussion der behandelten Abbildungen etwas in den Hintergrund tritt. Der Verfasser geht von den analytischen Abbildungsgleichungen aus, kommt so zu den singulären Kollineationen, die der klassischen Abbildung des Punktraumes zugrunde liegen, und zu der allgemeinsten linearen Abbildung des Strahlenraumes, aus der er durch Spezialisierung die Spurenabbildung gewinnt. Hierzu kann man einwenden, daß die Spurenabbildung sich in erster Linie als Abbildung des Ebenenraumes, also als duales Gegenstück zur Zentralprojektion deuten läßt, und daß — falls man sie als Abbildung des Strahlenraumes betrachtet — auch die hierzu duale, ja ebenso wichtige Formulierung erwähnt werden müßte. In einem sehr hübsch geratenen Abschnitt wird die in der Praxis noch viel zu wenig angewandte darstellende Geometrie des n-dimensionalen Raumes behandelt. Sehr zu begrüßen ist auch die knappe und übersichtliche Zusammenstellung der Ergebnisse der Zyklographie sowie einiger anderer nichtlinearer Abbildungen. Das Buch zeigt aber vor allem, daß die darstellende Geometrie, die an der Wiener Schule ja besonders gepflegt wird, wieder einmal »im Fluß« ist und auch dem reinen Mathematiker anregende Gedanken zu bringen vermag.

Berlin. F. Rehbock. 746

Ferner sind folgende Werke bei der Schriftleitung eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

ROBERT **FRICKE,** Lehrbuch der Algebra, verfaßt mit Benutzung von Heinrich Webers gleichnamigem Buche. Erster Band. Allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen. Mit 4 in den Text gedruckten Figuren. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., Braunschweig 1924. VIII + 468 S. Preis geh. 12 ℳ, geb. 14 ℳ. — Zweiter Band. Ausführungen über Gleichungen niederen Grades. Mit 33 in den Text gedruckten Figuren. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., Braunschweig 1926. VIII + 418 S. Preis geh. 15 ℳ, geb. 18 ℳ.

Proceedings of the optical Convention 1926 Part I and II. Part I 512 pages; part II 578 pages. Published by the Optical Convention London, 1926. Price 3 £.

Dipl.-Ing. H. **CROSECK,** Beiträge zur Theorie des Segelns auf Grund der neueren durch Versuche und Erfahrungen der Luftfahrt gewonnenen aerodynamischen Erkenntnisse über die Strömungsvorgänge an Flächen. Mit 58 Abb. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925. IV + 69. Preis 4,80 ℳ.

F. H. van den **DUNGEN,** Cours de Technique des Vibrations. Fascicule I. Tiges élastiques rectilignes. 109 S. Fascicule II. Tiges élastiques rectilignes (Suite et Fin). 199 S. Editions de la Revue de l'Ecole Polytechnique 1926.

Dr. A. **LANDÉ,** a. o. Professor an der Universität Tübingen. Die neuere Entwicklung der Quantentheorie. Zweite völlig umgearbeitete Auflage. Mit 13 Abb. Wissenschaftliche Forschungsberichte. Naturwissenschaftliche Reihe herausgegeben von Dr. Raphael Ed. Liesegang, Frankfurt a. M. Band 5. Verlag von Theodor Steinkopff, Dresden und Leipzig 1926. XI + 180 S. Preis geh. 12,00, geb. 13,20 ℳ.

Dr.-Ing. FRIEDRICH **PROEGER,** Diplom-Ingenieur. Die Getriebekinematik als Rüstzeug der Getriebedynamik. Mit 114 Abb. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens. Herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. Heft 285. VDI.-Verlag G. m. b. H. 73 S. Preis 6,70 ℳ.

Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule München. Herausgegeben vom Institutsvorstand Dr. **THOMA,** Dr.-Ing. o. Professor. Heft 1 mit 84 Abb. und einem Titelbild. Verlag von R. Oldenbourg, München u. Berlin 1926. 90 S. Preis 6,20 ℳ.

Dr. FRITZ **WENNER,** a. o. Professor an der Technischen Hochschule Aachen. Praktische Rechenbildkunde (Nomographie). Mit 30 Abb. Aachener Verlags- und Druckerei-Gesellschaft 1926. VI + 78 S. Preis 3,00 ℳ.

NACHRICHTEN

Newton - Gauß - Gedenktage. In diesen Wochen werden in weiterer Oeffentlichkeit zwei Gedenktage gefeiert, an denen wir nicht ganz vorübergehen können, da sie der Erinnerung an zwei der allerbedeutendsten Vertreter der angewandten Mathematik und Mechanik gelten.

Am 31. März waren es 200 Jahre, seit in London Isaac Newton verschied, der wie ein Fürst seines Volkes geehrt, in der Westminster-Abtei bestattet wurde. Er ist, um nur das Wichtigste zu nennen, der Schöpfer der Mechanik materieller Punkte, der Entdecker des Gravitationsgesetzes, der Lichtbrechung und Farbenentstehung, der Schallfortpflanzung, einer der Begründer der Infinitesimalrechnung, der Erfinder des Spiegelteleskops. Außerordentlich viel von dem, was er zum ersten Mal lehrte, ist fast unverändert in den Elementen der heute gültigen Lehrgänge erhalten geblieben, wie etwa die Bestimmung der Planetenbewegung; fast alles, was er geschaffen, auch seine lange Zeit hindurch abgelehnte Optik, hat zur Grundlage weiteren fruchtbaren Ausbaus gedient. Diese Leistungen sind heute so bekannt, daß sie an dieser Stelle kaum erwähnt zu werden brauchen.

Wenn wir in der weiten Perspektive, die ein Zeitabstand zon zwei Jahrhunderten gewährt, die Geistesschöpfungen Newtons ins Auge fassen, so hebt sich als die stärkste und nachhaltigste Wirkung diese ab: Newton hat mit

seiner Mechanik das erste Beispiel einer Naturbeschreibung gegeben, die die Form von Differentialgesetzen, mit der Zeit als unabhängig Veränderlicher, besitzt. ›Bis in die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts galt dies als das ausschließliche Vorbild für jede exakte Naturwissenschaft. Die Höhepunkte der Differentialgleichungs-Physik bezeichnen die Fresnelsche Wellenlehre des Lichtes, die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und die Relativitätstheorie von Einstein. Dabei tut es nichts zur Sache, daß die Lehre von den Lichtwellen in bewußtem Gegensatz zu Newtons optischen Anschauungen aufgestellt wurde und die Relativitätstheorie auf dem Boden der von Ernst Mach gegebenen Kritik der Grundlagen der Newtonschen »Principia« entstanden ist. Die deterministische Grundform, wonach aus Anfangsbedingungen einerseits und andrerseits aus »Kraftgesetzen«, die nur der Bedingung der Einfachheit unterliegen, der zeitliche Ablauf einer Erscheinung eindeutig bestimmbar sein muß, diese sogenannte »kausale« Form der Beschreibung, zeigt das Newtonsche Vorbild, dem man unverändert so lange Zeit hindurch gefolgt ist. Erst vor etwa 50 Jahren traten die ersten Spuren einer anders gerichteten physikalischen Auffassung hervor, und allmählich beginnt man, sich mit dem Gedanken vertraut zu machen, daß es neben dem weiten Gebiet, das einer »kausalen« Naturbeschreibung zugänglich ist, auch andere Erscheinungen gibt, denen eine nicht-deterministische, eine statistische Theorie angepaßt zu sein scheint.

Am 30. April kehrt zum 150. Male der Tag wieder, an dem in Braunschweig Carl Friedrich Gauß geboren wurde, den die Mathematiker aller Länder als »Mathematicorum princeps« verehren. Gauß hat die moderne Zahlentheorie geschaffen, die Grundlagen der heutigen Algebra gelegt, durch seine Untersuchungen über elliptische Funktionen der Analysis neue Wege erschlossen, die Gedankengänge der Nicht-Euklidischen Geometrie vorbereitet. Aber von diesem Manne, der für die reine Mathematik mehr geleistet hat als irgend einer vor oder nach ihm, durfte sein Freund Olbers mit Recht schreiben: »Für eine mathematische Lehrstelle hat er eine ganz entschiedene Abneigung: sein Lieblingswunsch ist, Astronom bei irgend einer Sternwarte zu werden.«

In der Tat weist alles darauf hin, daß Gauß Anlaß und Anregung zu seinen mathematischen Untersuchungen fast immer praktischen Aufgaben entnahm. Die Bahnbestimmung des Planeten Ceres, die Berechnung der Störungen der Pallas-Bahn waren die ersten, astronomischen Probleme, aus denen sich die Forschungsarbeiten über die hypergeometrische Reihe und die mechanische Quadratur entwickelten. Umfangreiche geodätische Aufnahmen, für die die Methoden und zum Teil die Instrumente neu zu schaffen waren, folgten; eine ihrer Früchte ist die Gaußsche Methode der kleinsten Quadrate, eine weitere, später ausgereifte liegt in den Untersuchungen zur Flächentheorie. Der analytischen Mechanik gab Gauß die Form des »Prinzips vom kleinsten Zwange« und schuf, in diesen Gedankengängen bleibend, die Theorie der Kapillarität. Im Verein mit Wilhelm Weber stellte Gauß eingehende Beobachtungen über den Erdmagnetismus an, die ihn zu einer allgemeinen Theorie der erdmagnetischen Erscheinungen, darüber hinaus zu Forschungen über Potentialkräfte allgemeiner Natur führten. Am bekanntesten ist, daß er mit Weber zusammen den ersten elektromagnetischen Telegraphen konstruierte.

Wenn man heute nicht zögert, Gauß als schöpferische Kraft in eine Reihe mit Archimedes und Newton zu stellen, so denkt man zumeist an die außerordentliche Vielseitigkeit seiner Leistungen, die auf jedem Gebiet zugleich in die Tiefe gehen. Fast noch bewundernswerter erscheint die Einheit, zu der ihm bei jeder Aufgabe Theorie, numerische Durchführung und Beobachtung zusammenwuchs. In dieser Hinsicht ist das neunzehnte Jahrhundert nicht sein Schüler gewesen, sondern hat sich durch fortschreitende sachliche und methodische Spezialisierung mehr und mehr von dem Gaußschen Vorbild entfernt. Die Mathematiker werden sich der Einstellung, die Gauß den Anwendungen gegenüber besaß, wieder nähern müssen, wenn sie ihre Wissenschaft nicht allmählichem Verfall entgegenführen wollen. Mises.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik. Die diesjährige Hauptversammlung wird im September in Kissingen stattfinden zugleich mit der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Gesellschaft für Technische Physik. Vortragsanmeldungen aus allen Fachgebieten, die die Gesellschaft pflegt, werden an den Geschäftsführer Prof. Dr. v. Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9 erbeten.

Anfang Oktober wird im Rahmen der Werkstofftagung, die in Berlin vom Verein deutscher Ingenieure in Verbindung mit mehreren anderen technischen Vereinigungen abgehalten wird, eine Fachsitzung der Gesellschaft stattfinden, in der Festigkeits- und Werkstoff-Fragen behandelt werden sollen. Hierzu liegen bereits eine Reihe von Vortragsanmeldungen vor, über die im nächsten Heft Näheres berichtet werden wird.

Der Mitgliederstand hat Ende März zum ersten Mal die Zahl 300 überschritten. 783

Persönliches. Der Privatdozent an der Universität Wien, Herr Dr. Josef Lense ist zum außerordentlichen Professor der angewandten Mathematik an der Technischen Hochschule in München ernannt worden.

(Redaktionsschluß 9. April 1927.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9; für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7. Druck von A. W. Schade, Berlin N 39.